1.1. *a)* Igaz. *b)* Hamis, például ha $O = A$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$, míg ha $O = B$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. *c)* Igaz, az eredmény O választásától függetlenül $\overrightarrow{BA}$. *d)* Igaz. *e)* Hamis, lehetnek ellenkező irányúak is. *f)* Igaz.

1.2. *a)* Igaz, hisz $\mathbf{0} = 0\mathbf{a}$ bármely $\mathbf{a}$-ra. *b)* Hamis. *c)* Igaz. *d)* Igaz, pl. $\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b}$. *e)* Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egy síkba esnek, de $\mathbf{v}$ nem párhuzamos e síkkal, akkor $\mathbf{v}$ nem áll elő az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként. *h)* Igaz. Ha a vektorok közt ott a zérusvektor, akkor az a másik kettő $\neg$-szorosának összege. Ha van a vektorok közt két nem párhuzamos, akkos a sík minden vektora előáll lineáris kombinációjukként, így a harmadik vektor is. Ha a vektorok mind párhuzamosak, akkor egyikük lineáris kombinációjaként megkapható a másik kettő. *i)* Hamis, pl. az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok közül $\mathbf{c}$ nem fejezhető ki $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}$ lineáris kombinációjaként, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ nem párhuzamosak.

1.3. „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj."

1.4. *a)* $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = 4\mathbf{a}$, *b)* $3\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, *c)* $2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{5}{2}\mathbf{b}$.

1.5. *a)* $\mathbf{0}$, *b)* $\overrightarrow{AD}$, *c)* $\overrightarrow{CB}$, *d)* $\overrightarrow{AC}$, *e)* $2\overrightarrow{AB}$, *f)* $2\overrightarrow{AD}$, *g)* $\overrightarrow{AC}$.

1.6. *a)* $\mathbf{0}$, *b)* $\mathbf{0}$, *c)* $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$.

1.7. $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$, $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \mathbf{0}$.

1.8. Egyik lehetőség a megoldásra, hogy megmutatjuk, az $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_n}$ vektorokból egy szabályos n-szög szerkeszthető, így összegük $\mathbf{0}$. Egy elegánsabb és egyszerűbb bizonyítást kapunk, ha meggondoljuk, mi történik az összeggel, ha a vektorokat $2\pi/n$ szöggel elforgatjuk. Mivel az elforgatás az $\overrightarrow{OP_k}$ vektorokat ciklikusan felcseréli, az összeg nem változik, ugyanakkor elfordul. E feltételt csak a nullvektor elégíti ki.

1.9. A háromszögmódszerből adódik, hogy ha a fenti 4 kifejezés valamelyik $\mathbf{0}$, akkor a három vektor egy háromszöget alkot. Másrészt vegyünk fel egy háromszöget és az egyik oldal irányítását rögzítsük, legyen ez az $\mathbf{a}$ vektor. Ekkor a másik két oldal irányítására összesen négy eshetőség adódik, épp azok, amelyek megfelelnek a feladatbeli négy esetnek.

1.10. Az előző feladatból következik, hisz az első két vektor összege egyenlő a harmadikkal.

1.11. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1)-szerese.

1.12. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható az 1.17. ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött – esetleg elfajuló – paralelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, ill. $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a paralelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$-t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(c_1 - v_1)\mathbf{a}_1 = (v_2 - c_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fönn, ha $(c_1 - v_1) = (v_2 - c_2) = 0$, azaz ha $c_1 = v_1$ és $c_2 = v_2$. Tehát a felbontás egyértelmű.

1.13. A $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi (ld. az alábbi *(a)* ábrán). Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként, azaz $\overrightarrow{OC} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ (ld. a *(b)* ábrán). Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = c_3\mathbf{a}_3$ valamely c_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$.

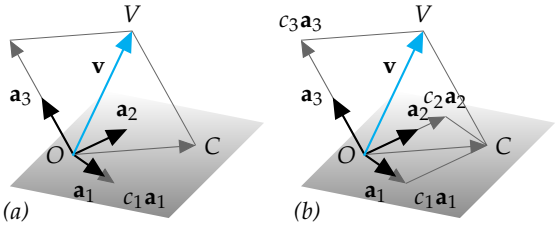
Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$$

a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(c_1 - v_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 - v_2)\mathbf{a}_2 + (c_3 - v_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Így ha $c_1 \neq v_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2 - v_2}{c_1 - v_1}\mathbf{a}_2 - \frac{c_3 - v_3}{c_1 - v_1}\mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $c_1 = v_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $c_2 = v_2$ és $c_3 = v_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű.



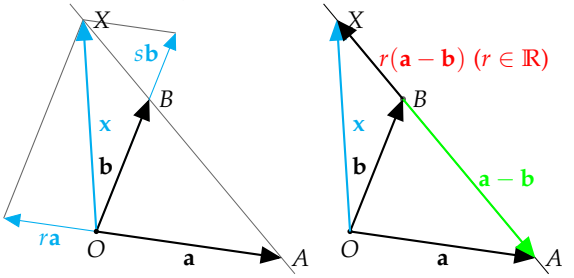
1.14. A C-ből induló súlyvonal $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, az A-ból induló súlyvonal $\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}$, az B-ből induló $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$. E három vektor összege $\mathbf{0}$, így lehetnek egy háromszög oldalvektorai.

1.15. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

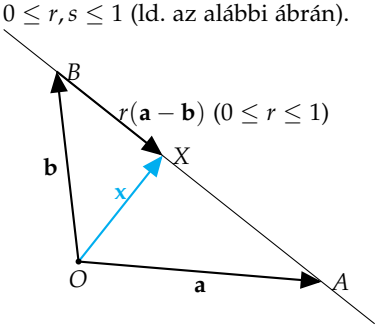
$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az

$r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r+s=1$ (ld. az alábbi ábrán, ahol egyébként $r=-0.5$, $s=1.5$).



1.16. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\overrightarrow{BX}=r\overrightarrow{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékkel lehetséges. Tehát $\mathbf{x}=r\mathbf{a}+(1-r)\mathbf{b}$, ahol $0\le r\le 1$. Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r+s=1$ és $0\le r,s\le 1$ (ld. az alábbi ábrán).



1.17. Az első esetben: *a)* egy egyenesbe esnek, mert az együtthatók összege 1, *b)* P az A ponthoz esik közelebb, mert $\overrightarrow{OA}$ együtthatója nagyobb, és *c)* P a szakaszon kívül van, mert nem pozitív mindkét együttható.

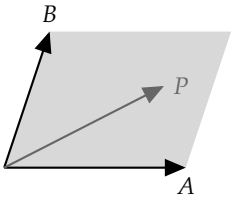
A második esetben *a)* A, B és P egy egyenesbe esnek, mert az együtthatók összege 1, *b)* P az A ponthoz esik közelebb, mert $\overrightarrow{OA}$ együtthatója nagyobb, és *c)* P a szakaszra esik, mert mindkét együttható pozitív.

1.18. Ha $|\overline{AP}|:|\overline{PB}|=m:n$, akkor $|\overline{AB}|:|\overline{PB}|=(m+n):n$, amiből $\overrightarrow{BP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$. De $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$ és $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, így $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m=n=1$ esetben kapjuk, és ekkor $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

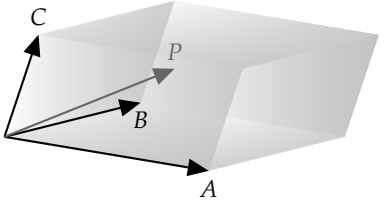
1.21. *a)* igen, *b)* nem.

1.22. Igen, hisz mindhárom együttható 0 és 1 közé esik.

1.23. A precíz bizonyítást mellőzzük, megelégszünk az állítás szemléltetésével:



1.24. A precíz bizonyítást mellőzzük, megelégszünk az állítás szemléltetésével:



1.25. A feladat szerint $c\in R_a$ pontosan akkor teljesül, ha $a\ R\ c$. Tegyük fel, hogy R_a és R_b nem diszjunkt. Ha c egy közös elemük, akkor c az a-val és b-vel is relációban van, azaz $a\ R\ c$ és $b\ R\ c$, de a szimmetria miatt $c\ R\ b$, a tranzitivitás miatt pedig az $a\ R\ c$ és $c\ R\ b$ relációkból következik az $a\ R\ b$. Ekkor pedig a tranzitivitást használva bármely x elemere $b\ R\ x$-ből következik $a\ R\ x$, azaz $x\in\mathbb{R}_b$-ből következik $x\in R_a$, azaz $R_b\subseteq R_a$. Az a és b szerepét megfordítva kapjuk $R_a\subseteq R_b$, tehát $R_a=R_b$. Végül be kell még látnunk, hogy e halmazok uniója kiadja az egész X halmazt. Ez igaz, hisz minden a elemre $a\ R\ a$, azaz $a\in R_a$.

1.26. *a)* és *c)* nem szimmetrikus, *d)* nem tranzitív, ezek egyike sem ekvivalenciareláció. *b)* és *e)* igen (utóbbi akkor, ha minden hallgató csak egy évfolyamhoz tartozhat).

1.27. Tekintsünk egy $\overrightarrow{A\,B}$ és egy $\overrightarrow{C\,D}$ irányított szakaszt! Azt mondjuk, hogy ezek relációban vannak, ha van egy olyan eltolás, mely A-t C-be, B-t D-be viszi. E reláció ekvivalenciareláció (ellenőrizzük), így egy osztályozást definiál az irányított szakaszok halmazán. Egy ilyen osztályt nevezünk vektornak.

1.28. A vektor iránya a félegyenesek, az állása az egyenesek halmazán – az előző feladathoz hasonlóan az eltolással – definiált ekvivalenciareláció egy ekvivalenciaosztálya.

1.29. *a)* igaz, *b)* hamis, az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének előjeles hosszával egyenlő, *c)* igaz, *d)* hamis (asszociativitásról nem is lehet szó, mert a két szorzás művelet egyike skaláris szorzás, a másika skalárral való szorzás az $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ szorzatban), *e)* igaz, *f)* igaz, *g)* hamis, ld. még az 1.34. feladatot,

1.30.

a) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$.

b) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma=\sqrt{2}\cdot 2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-2$.

c) $1\cdot 2\cdot(-1)=-2$.

d) 0, hisz merőlegesek ($|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma=\sqrt{2}\cdot 2\cdot 0=0$).

e) Az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, a $\mathbf{b}$ vektor hossza $\sqrt{4^2+3^2}=5$, az $\mathbf{a}$ vektornak a vízszintes

rácsvonalakkal bezárt szöge $\pi/4$, a $\mathbf{b}$ vektornál e szög szögfüggvényei $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, $\sin\gamma = \frac{3}{5}$. Így

$$\begin{aligned}\cos(\gamma + \frac{\pi}{4}) &= \cos\gamma\cos\frac{\pi}{4} - \sin\gamma\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

tehát a skaláris szorzat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

1.31. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ nem párhuzamos vektorok, $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzat párhuzamos a $\mathbf{c}$ vektorral, míg az $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ szorzat az $\mathbf{a}$ vektorral, tehát $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

1.32. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ *b)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

1.33. A Pitagorasz-tétel következményeként $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek.

1.34. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $c = 0$, akkor az X pontok kiadják a tér összes pontját, ha viszont $c \neq 0$, akkor egyetlen ilyen X pont sincs. Mivel $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ezért

$$\left(c\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(c\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right)\cdot\mathbf{a} = c,$$

ezért ha Y jelöli azt a pontot, melyre

$$\overrightarrow{OY} = c\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2},$$

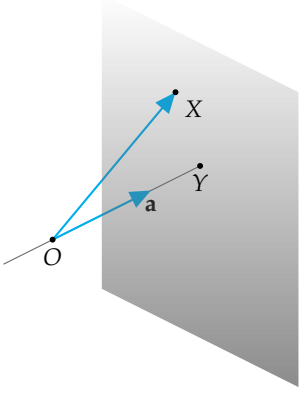
akkor $\overrightarrow{OY}\cdot\mathbf{a} = c$. Az összes olyan X pont, melyre $\overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{a} = c$, az Y ponton átmenő és az $\mathbf{a}$ vektorra merőleges sík pontjaiból áll. Egyrészt ha X eleget tesz a feltételnek, akkor

$$\overrightarrow{XY}\cdot\mathbf{a} = \left(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}\right)\cdot\mathbf{a} = \overrightarrow{OY}\cdot\mathbf{a} - \overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{a} = 0,$$

tehát X e sík egy pontja. Másrészt, ha X e sík egy pontja, akkor $\overrightarrow{XY}\cdot\mathbf{a} = 0$, így

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{a} &= \overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{a} + \overrightarrow{XY}\cdot\mathbf{a}\\ &= \left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY}\right)\cdot\mathbf{a}\\ &= \overrightarrow{OY}\cdot\mathbf{a} = c,\end{aligned}$$

tehát X eleget tesz a feltételnek.



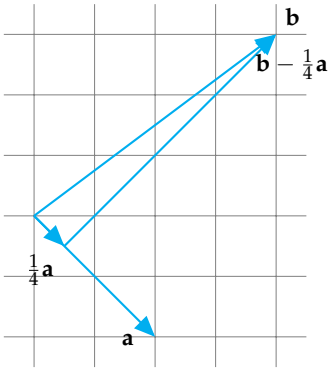
1.35. Geometriai megoldás: a három egységvektor egy szabályos háromszög három oldalvektora azonos körüljárás szerint irányítva, mivel összegük $\mathbf{0}$. Így hajlásszögük $2\pi/3 = 120°$, tehát a vektorpárok skaláris szorzata $-\frac{1}{2}$, így az összeg $-\frac{3}{2}$.
Algebrai megoldás: $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\cdot(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) = 0$, tehát $0 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 + 2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3)$. Kihasználva, hogy a vektorok egységvektorok, kapjuk, hogy $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$.

1.36. Az 1.13. feladat szerint a $\mathbf{v}$ vektor megfelelő konstans együtthatókkal előállítható $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{c}$ alakban. Az egyenlőség mindkét oldalát (skalárisan) megszorozva $\mathbf{v}$-vel, majd kihasználva a feltételekből következő $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} = 0$ egyenlőségeket, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ adódik, ami csak úgy teljesülhet, ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

1.37. Mivel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, ezért

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{2}{8}\mathbf{a} = \frac{1}{4}\mathbf{a},$$

míg az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevő $\mathbf{b} - \frac{1}{4}\mathbf{a}$. Ezt mutatja az alábbi ábra.



1.38. Nem, legyen pl. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két egymásra merőleges egységvektor, és $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1.39. *a)* hamis, nem kommutatív és nem asszociatív, *b)* hamis, hisz $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$ akkor is fönnáll, ha $\mathbf{a}-\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, nem csak akkor, ha $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$. *c)* igaz, *d)* igaz, *e)* hamis, *f)* igaz.

1.40.

a) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

b) $\mathbf{0}$, hisz párhuzamosak ($\sin\gamma = 0$, így abszolút értéke 0).

1.41. Jelölje P szomszédait Q, R és S.

a) Ekkor két lapátló-vektor például a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ és a $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$ vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) =\\ &\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PS} =\\ &\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} = 1.\end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor ($\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}$) szorzata:

$$\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}\right)$$
$$=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR}=2.$$

c) A Q, R és S csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{PS}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkosson. Ki fogjuk használni, hogy ekkor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}$. Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\overrightarrow{PQ}\times\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}\right)=$$
$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=$$
$$\mathbf{0}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PS},$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

d) Legyen a lapvektor a $\overrightarrow{PR}$, a nem szomszédos lapátló-vektor $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}$. Ezek szorzata:

$$\overrightarrow{PQ}\times\left(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}\right)=$$
$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PS}-\overrightarrow{PR},$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

1.42. Ha $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}\perp\mathbf{w}$, akkor $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=0$, így bármely $c,d\in\mathbb{R}$ számokra $\mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}+d\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v})+\mathbf{u}\cdot(d\mathbf{w})=c\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+d\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=c0+d0=0$, tehát $\mathbf{u}$ merőleges a $c\mathbf{v}+d\mathbf{w}$ lineáris kombinációra.

1.44. Egyik lehetőség a megoldásra: $\big||\mathbf{b}|\mathbf{a}\big|=\big||\mathbf{a}|\mathbf{b}\big|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, ezért a paralelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a paralelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$-szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor. A második kérdés megválaszolásához használjuk az 1.18. példa eredményét!

1.45. A tükör a körüljárást cseréli föl. Milyen irányokat cserél föl, és milyeneket nem? A feladatban föltett kérdés nem pontos, hisz egy vízszintesen a földre helyezett tükör megfordítja a lentet és föntet. Nem cseréli föl a tükör a síkjával párhuzamos irányokat: minden, a tükör síkjával párhuzamos vektor tükörképe önmaga. Tehát, ha a tükör előtt állunk, és a tükör is függőleges, akkor a „fölfelé" irány a tükörképen sem változik. Viszont a tükör fölcseréli a tükörre merőleges irányokat. Mielőtt megnézzük, hogy hogy cserélődik fel a jobb és a bal, definiálnunk kell mi az, hogy jobb és bal? Egy lehetőség a definiálásra: ha értelmezve van egy viszonyítási rendszerben (pl. az emberi testhez képest, vagy a mozgó járműben,...) a *föl* és az *előre*, melyek egymásra merőleges irányok, akkor a *jobb* irány az *előre* $\times$ *föl* vektori szorzattal definiálható. Ennek képe a tükörben viszont $(-\textit{előre})\times\textit{föl}=-\textit{jobb}$, ami épp a *bal*. Mivel három páronként merőleges vektor körüljárása nem változik mozgatás, forgatás közben, ezért egy jobbrendszer képe mindig balrendszer lesz a tükörben.

1.46. Bontsuk fel $\mathbf{a}$-t az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos $\mathbf{p}$ és rá merőleges $\mathbf{m}$ összetevőkre. $|\mathbf{e}\times\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{a})\angle$, ami megegyezik $|\mathbf{m}|$-mel. $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ síkjára, ezért $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$ az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ síkjában van és $|(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}|=|\mathbf{a}|\sin(\mathbf{e},\mathbf{a})\angle$, így $(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}=\mathbf{m}$.

1.47. Az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}0$ egyenlőséget $\mathbf{a}$-val vektoriálisan szorozva, átrendezés után kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{0},$$

amiből $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$. $\mathbf{b}$-vel való szorzás után kapjuk a $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ egyenlőséget.

Az állítás megfordítása nem igaz, mivel bármely három kollineáris vektor esetén $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ akkor is, ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\neq\mathbf{0}0$.

1.48. *a)* V, és a körüljárás azonos. *b)* $4V$, és az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ körüljárása az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ körüljárásával ellentétes!

1.49. Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. E három vektor ebben a sorrendben alkosson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint $\mathbf{ijk}=\mathbf{jki}=\mathbf{kij}=1$, $\mathbf{kji}=\mathbf{jik}=\mathbf{ikj}=-1$. Mivel a vegyes szorzat egy paralelepipedon térfogatát vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel, akkor annak értéke 0. Pl. $\mathbf{iji}=(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$. A három lapátlóvektor: $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{k}+\mathbf{i}$. Ezek vegyes szorzata

$$((\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}))\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{i})$$
$$=\mathbf{ijk}+\mathbf{iji}+\mathbf{ikk}+\mathbf{iki}+\mathbf{jjk}+\mathbf{jji}+\mathbf{jkk}+\mathbf{jki}$$
$$=1+0+0+0+0+0+0+1$$
$$=2,$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. Ez azt is jelenti, hogy e három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata 2.

1.50. *a)* Igen, *b)* nem, az origó kijelölése is szükséges, *c)* igen, *d)* nem, a szokásos $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ csak ortonormált bázisban érvényes,

1.51. *a)* Ilyen vektorok nincsenek (CBS-egyenlőtlenségnek ellent mond), *b)* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-9$ (ld. az 1.12 polarizációs formulát), *c)* ilyen vektorok a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem léteznek, *d)* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-4$ (ld. az 1.11 polarizációs formulát), *e)* 17 (a 8, 15, 17 pithagorászi számhármasok)

1.52.
a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(3,-3,-3)$,
b) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(-2,-1,2)$,
c) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=10$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(-4,8,-4)$.

1.53. *a)* $\pi/2$, *b)* $\pi/3$, *c)* $\pi/4$, *d)* $3\pi/4$, *e)* $\pi/4$,

1.54. *a)* 2.701, 154.76°, *b)* 1.91986226152, 110.0°.

1.55. *a)* egyenlő oldalú, *b)* tompa szögű (B csúcsnál), *c)* derékszögű (C csúcsnál).

1.56. $\arccos(1/\sqrt{n})$. $n=2$ esetén 45°, $n=4$ esetén 60°.

1.57. Kihasználjuk, hogy $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$ a párhuzamos és $\mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevő:
a) $(4,6,-1) = (2,4,-4) + (2,2,3)$,
b) $(5,-3,8) = (2,3,6) + (3,-6,2)$,
c) $(1,4,0,3) = (2,2,2,2) + (-1,2,-2,1)$,
d) $(4,3,6,7) = (2,4,4,8) + (2,-1,2,-1)$.

1.59. Az adatsorok átlaga:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3,\ \bar{y} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4,$$

$\bar{z} = \bar{y} = 4$, így az $a_i = x_i - \bar{x}$, $b_i = y_i - \bar{y}$, $c_i = z_i - \bar{z}$ értékekből képzett vektorok $\mathbf{a} = (-2,-1,0,1,2)$, $\mathbf{b} = (-1,-2,0,2,1)$, $\mathbf{c} = (1,2,0,-2,-1)$. A két korrelációs együttható

$$r_{xy} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{8}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{4}{5} = 0.8,$$
$$r_{xz} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{c}\|} = \frac{-8}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = -\frac{4}{5} = -0.8.$$

1.60. E feladat másként fogalmazva azt mondja, hogy ha egy vektorrendszerben találunk olyan vektort, mely a többi lineáris kombinációja, akkor a vektorok bármely sorba rendezése mellett olyat is találunk, mely csak az őt sorrendben megelőző vektor(ok) lineáris kombinációja.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, akkor $t = 1$, hiszen az $\mathbf{a}_1$-nél kisebb indexű vektorok halmaza az üres halmaz, melynek bármely lineáris kombinációja a nullvektor, tehát $\mathbf{a}_1$ valóban a nála kisebb indexűek lineáris kombinációja.

Ha $t \geqslant 2$, akkor az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_t$ vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, hogy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_t\mathbf{a}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{t-1}$ vektorok is lineárisan összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így

$$\mathbf{a}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{a}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{a}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{a}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor.

($\Leftarrow$) Ha létezik olyan $\mathbf{a}_t$ vektor, mely a kisebb indexűek lineáris kombinációja, akkor e rendszer definíció szerint lineárisan összefüggő. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

1.64. Teljes indukcióval a háromszög-egyenlőtlenségből.

1.66. Az $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 \\
&= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\
&= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) \\
&= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2.
\end{aligned}$$

A tétel igazolható elemi geometriai eszközökkel is a Pitagorasz-tétel felhasználásával.

1.67. Használjuk az $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ háromszög-egyenlőtlenséget az $\mathbf{u} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorokra.

1.68. Az $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ behelyettesítésével majd a zárójelek felbontásával

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) \\
&\quad= \frac{1}{4}\left((\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right) \\
&\quad= \frac{1}{4}(4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

1.69. Mindkét összefüggés a CBS-egyenlőtlenség mindkét oldalának négyzetreemelése után kapott egyenlőtlenséggel ekvivalens. A *b)* esetén $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2$.