2.1. *a)* igen, *b)* igen, *c)* nem, *d)* igen, *e)* igen, *f)* nem.

2.2. Mindegyik.

2.3. Mindegyik esetben ekvivalens a két egyenletrendszer, mert azonos a megoldásaik halmaza.

a) Mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása $x = 2$, $y = 1$.

b) Mindkét egyenletrendszer láthatóan inkonzisztens, így a megoldások halmaza az üres halmaz.

c) Mindkettőnek $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ az egyetlen megoldása.

d) Bármelyik átalakítható a másikba elemi sorműveletekkel, vagy mindkettő azonos alakra hozható elemi sorműveletekkel, pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8 & 1.8 \\ 0 & 1 & 2.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

2.4. *a)* Behelyettesítés után mindkét egyenlet $0 = 0$ alakú, amit tetszőleges x és y kielégít, így az összes (x, y) számpár megoldása az egyenletrendszernek.

b) $x = 1$, y tetszőleges, azaz az összes $(1, y)$ alakú számpár megoldás.

c) A második egyenlet behelyettesítés után $0 = 1$ alakú, így az egyenletrendszer inkonzisztens.

d) $x = 1$, $y = 2$, azaz $(x, y) = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

2.6. *a)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *b)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *c)* Hamis, van lépcsős alakja minden valós mátrixnak, de csak a redukált lépcsős alak egyértelmű. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Hamis, pl. a $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix lépcsős alakú, de nincs egészelemű redukált lépcsős alakja.

2.7. *a)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.8. A sorcsere előállítható a beszorzás és a hozzáadás segítségével, nevezetesen az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorcsere ekvivalens az

$$S_i + S_j,\ S_j - S_i,\ S_i + S_j,\ -S_j,$$

elemi sorműveletekkel. Ellenőrzésül a mátrixokon való hatásukat is megadjuk:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_j-S_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2.9. Az elemi számelmélet egyik alaptétele a „legnagyobb közös osztó reprezentációs tétele”, mely szerint bármely két egész a és b számhoz létezik olyan x és y egész, hogy

$$\mathrm{lnko}(a, b) = xa + yb.$$

Például $\mathrm{lnko}(6, 10) = 2$ és az $x = 2$, $y = -1$ értékekkel $2 = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 10$. Így ha egy mátrix első oszlopának elemei 6, 10, 24, -40, 0, akkor a $2S_1$, $S_1 - S_2$ sorműveletek után az első sor első eleme 2, így az első oszlop nemnulla elemei eliminálhatók az $S_2 - 5S_1$, $S_3 - 12S_1$, $S_4 + 20S_1$ sorműveletekkel. Ha az első oszlop elemei 6, 10, 15, akkor $\mathrm{lnko}(6, 10) = 2$, és a második sor első eleme az előbbiek szerint eliminálható. Ezután az első oszlop elemei 2, 0, 15, $\mathrm{lnko}(2, 15) = 1$, $1 = 8 \cdot 2 + (-1) \cdot 15$, így a $8S_1$, $S_1 - S_3$, $S_3 - 15S_1$ sorműveletek után az első oszlop elemei 1, 0, 0. Ha észrevesszük, hogy $\mathrm{lnko}(6, 10, 15) = 1$ és $1 = 6 + 10 - 15$, akkor az $S_1 + S_2 - S_3$, $S_2 - 10S_1$, $S_3 - 15S_1$ sorműveletek gyorsabban eredményre vezetnek.

Az x és y együtthatók kiszámolhatók a kiterjesztett euklideszi algoritmussal (extended Euklidean algorithm). Hasonló algoritmus létezik az egész- vagy racionális együtthatós polinomokra is.

2.10. Az eredmény 1 valószínűséggel olyan mátrix lesz, melynek főátlójában 1-esek, egyebütt 0-k vannak. Egy egyszerű Octave-kód:

```
function egysegefl(n, t)
  % n: mátrix rendje, t: tesztek száma
  count = 0; % számláló
  for i = 1:t
    a = rand(n, n);
    if sum(diag(rref(a))) != n
      count += 1;
    endif
  endfor
  count
endfunction
```

A redukált lépcsős alak kiszámítása számítógéppel lebegőpontos számábrázolás esetén az elemi sorműveletek numerikus instabilitása miatt nem veszélytelen. Annak megtapasztalásához, hogy lineáris kapcsolat véletlen létrejötte függ a szóba jöhető elemek számától és a mátrix rendjétől, a csak egészeket használó alábbi kód többet ad:

```
function egysege(l, n, t)
  %l: limit, n: mátrix rendje, t: tesztek száma
  count = 0; % számláló
  for i = 1:t
    a = randi([-l l], n, n);
    if sum(diag(rref(a))) != n
      count += 1;
    endif
  endfor
  count
endfunction
```

2.11. Az egyenletrendszernek és lépcsős alakjának bővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&2\\ 0&0&1&1&1&2\\ 1&0&0&1&1&1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&2\\ 0&0&1&1&1&2\\ 0&0&0&2&1&2 \end{array}\right]$$

Legyen $x_5 = t$, az utolsó egyenletből $x_4 = 1 - \frac{1}{2}t$, a harmadik egyenletbe való helyettesítés után $x_3 1 - \frac{1}{2}t$, a második egyenletből $x_2 = t$, végül az első egyenletből $x_1 = -\frac{1}{2}t$. Tehát a megoldás

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t\\ t\\ 1-\frac{1}{2}t\\ 1-\frac{1}{2}t\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az $x_4 = t$ paraméterválasztás esetén az eredmény:

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1\\ -2t+2\\ t\\ t\\ -2t+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ 2\\ 0\\ 0\\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 1\\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.12. Egyetlen elemi sorművelet világossá teszi, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4\\ -1&1&-1&2\\ 2&1&2&1\\ 4&4&4&1 \end{array}\right] \overset{S_4-4S_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&4\\ -1&1&-1&2\\ 2&1&2&1\\ 0&0&0&-15 \end{array}\right]$$

2.13. Az elemi sorműveletek:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7&14&-21&7\\ 1&2&-3&1\\ 5&10&15&5\\ 3&6&-9&3 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{7}S_1, \frac{1}{5}S_3, \frac{1}{3}S_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1\\ 1&2&-3&1\\ 1&2&3&1\\ 1&2&-3&1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} S_2-S_1\\ S_3-S_1\\ S_4-S_1 \end{array} \overset{}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&6&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right].$$

Innen a megoldás:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t\\ t\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}.$$

E feladat arra példa, hogy abból, hogy az egyenletek száma több az ismeretleneknél, nem következik, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens. Sőt, mint látjuk, akár végtelen sok megoldása is lehet!

2.14. $(x, y, z) = (19/3, -2, 2/3)$ az egyetlen megoldás. E feladat arra példa, hogy abból, hogy az egyenletek száma több az ismeretleneknél, nem következik, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens.

2.15. Az egyenletrendszer inkonzisztens.

2.16.
$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-s-t\\ 1+s-3t\\ s\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1\\ -3\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.17. Mindegyik egyenletrendszert külön-külön is megoldhatnánk, de felesleges ismétlésektől mentesülünk, ha a szimultán egyenletrendszerek közös bővített mátrixán számolunk.

a) Használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2&1&1&0\\ 5&3&0&1 \end{array}\right] \overset{S_2-\frac{5}{2}S_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 2&1&1&0\\ 0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&1 \end{array}\right] \overset{2S_2}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2&1&1&0\\ 0&1&-5&2 \end{array}\right] \overset{S_1-S_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 2&0&6&-2\\ 0&1&-5&2 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}S_1}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1&0&3&-1\\ 0&1&-5&2 \end{array}\right].$$

Az első egyenletrendszer megoldása $x = 3$, $y = -5$, a másodiké $x = -1$, $y = 2$.

b) Az első egyenletrendszer ellentmondásos, a második megoldásai $x = 1 - \frac{1}{2}t$, $y = t$, ui.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2&1&1&2\\ 4&2&0&4 \end{array}\right] \overset{\text{rref}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1&\frac{1}{2}&0&1\\ 0&0&1&0 \end{array}\right].$$

c) A megoldások leolvashatók a bővített mátrix redukált lépcsős alakjából:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1&1&1&1&0\\ 1&2&3&4&5\\ 1&2&2&1&1 \end{array}\right] \overset{\text{rref}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1&0&0&1&-1\\ 0&1&0&-3&-3\\ 0&0&1&3&4 \end{array}\right].$$

2.18. *a)* Igaz. *b)* Hamis, az egyenletrendszer megoldhatósága nem függ az egyenletek számától. Az ismeretlenek számánál akár kevesebb, akár több egyenletből álló rendszer akár konzisztens, akár inkonzisztens is lehet. *c)* Igaz. *d)* Igaz, a nullvektor mindig megoldás.

2.19. Az ekvivalencia egyik iránya egyszerűen igazolható: ha két lineáris egyenletrendszer mátrixai, pl. az $[\mathbf{A}|\mathbf{a}]$ és a $[\mathbf{B}|\mathbf{b}]$ sorekvivalensek, azaz elemi sorműveletekkel az egyik a másikba vihető ($[\mathbf{A}|\mathbf{a}] \to [\mathbf{B}|\mathbf{b}]$), és $[\mathbf{B}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja $[\mathbf{X}|\mathbf{x}]$, akkor az $[\mathbf{A}|\mathbf{a}]$ mátrixé is ugyanez, így azonos az egyenletrendszerek megoldása. Sőt az is igaz, hogy ha az egyik egyenletrendszer inkonzisztens, akkor a másik is. Az állítás megfordításával azonban több nehézség adódik. (Itt hasznos lehet, ha magunk észrevesszük a feladat pongyola megfogalmazását, de ez a hibajegyzékbe is bekerült. E feladat kitűzése itt azt a célt

szolgálja, hogy vegyük észre a nehézségeket, és gondolkodjunk azon, hogy milyen ismeret hiányzik ahhoz, hogy ezt az állítást igazolni tudjuk. Tekintsük e feladatot motivációnak e fejezet további részéhez, ahol megismerünk minden szükséges eszközt a teljes bizonyításhoz.)

Első kérdés: mit értünk két mátrix sorekvivalenciáján? Pl. az

$$x+y=1, \qquad \begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=1 \end{matrix}$$

egyenletrendszerek nyilván ekvivalensek, hisz megoldáshalmazuk az $(1-t,t)$ vektorokból áll, ugyanakkor elemi sorműveletekkel bővített mátrixaik nem vihetők egymásba, hisz különböző a rendjük. Tehát pontosítanunk kell az állítást, két dolgot tehetünk: *(1)* az elemi sorműveletek közé vesszük a zérussorok elhagyását és hozzá vételét, *(2)* kikötjük, hogy csak azonos számú egyenletből álló egyenletrendszerekről van szó. Az első eset általánosabb eredményt kínál, érdemes lehet azt megtartani.

Második kérdés: Mi a helyzet az inkonzisztens egyenletrendszerekkel? Pl. az

$$\begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=2 \end{matrix} \quad \text{és az} \quad \begin{matrix} x+2y=1 \\ 0=1 \end{matrix}$$

egyenletrendszerek inkonzisztensek, de együtthatómátrixaik nyilván nem sorekvivalensek, ami redukált lépcsős alakjukról könnyen leolvasható:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az állítás egyik fele nem igaz inkonzisztens egyenletrendszerekre!

Harmadik kérdés: mit mondhatunk az egyenletrendszerek ismeretlenjeiről? Az nyilván mindegy, hogy hogy nevezzük az ismeretleneket. Az alábbi két egyenletrendszer megoldáshalmaza azonos, nevezetesen az $(1-t,t)$ vektorokból áll:

$$x+y=1, \qquad x_1+x_2=1.$$

Ha viszont pl. az első egyenletrendszer ismeretlenjei x, y és z, akkor a megoldáshalmaz $(1-t,t,s)$, ahol $s,t\in\mathbb{R}$. Így a következőképp pontosítható a bizonyítandó állítás:

Két azonos számú ismeretlennel rendelkező valós együtthatós konzisztens lineáris egyenletrendszer pontosan akkor ekvivalens, ha bővített mátrixaik bármelyike átvihető a másikba ekvivalens átalakításokkal, azaz elemi sorműveletekkel és szükség esetén zérussorok törlésével vagy hozzá vételével.

Negyedik kérdés: hogy jellemezhető egy egyenletrendszer megoldáshalmaza, és hogy dönthető el két halmazról, hogy azonosak? Az alábbi két halmaz például azonos, de ezt vajon hogy igazolhatjuk:

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}t, \qquad \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}t?$$

Ötödik kérdés: ha azonosak a megoldáshalmazok, hogyan igazolható, hogy a bővített mátrixok egymásba alakíthatók. A válaszon elgondolkodhatunk a továbbiakban, de legkésőbb e fejezet végén, a lineáris algebra alaptétele (2.98. tétel) után térjünk vissza, és csak akkor olvassuk el az alábbi bizonyítást, ha addig nem sikerült rájönnünk!

Legyen a két egyenletrendszer bővített mátrixa $[\mathbf{A}|\mathbf{a}]$ és $[\mathbf{B}|\mathbf{b}]$, redukált lépcsős alakjuk $[\mathbf{A}'|\mathbf{a}']$, ill. $[\mathbf{B}'|\mathbf{b}']$. Ha a két egyenletrendszer ekvivalens, azaz megoldáshalmazaik azonosak, akkor $\mathcal{N}(\mathbf{A})=\mathcal{N}(\mathbf{B})$, hisz a megoldáshalmaz a nulltér eltoltja. Akkor viszont $\mathcal{S}(\mathbf{A})=\mathcal{S}(\mathbf{B})$ és így $\mathcal{S}(\mathbf{A}')=\mathcal{S}(\mathbf{B}')$ is fennáll. Sőt, $\mathcal{S}(\mathbf{A}'|\mathbf{a}')=\mathcal{S}(\mathbf{B}'|\mathbf{b}')$, ha ugyanis itt nem állna egyenlőség, akkor az

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}' & \mathbf{a}' \\ \mathbf{B}' & \mathbf{b}'\end{array}\right]$$

egyenletrendszer inkonzisztens lenne, miközben megoldása azonos az eredeti egyenletrendszerek megoldásával. Így $[\mathbf{A}'|\mathbf{a}']$ sorvektorai lineáris kombinációjaként előállítható $[\mathbf{B}'|\mathbf{b}']$ minden sorvektora, és viszont, azaz zérussorok hozzá vételével és törlésével, valamint elemi sorműveletekkel elvégezhetők a következő átalakítások:

$$[\mathbf{A}'|\mathbf{a}'] \to \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}' & \mathbf{a}' \\ \mathbf{O} & \mathbf{0}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}' & \mathbf{a}' \\ \mathbf{B}' & \mathbf{b}'\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{O} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{b}'\end{array}\right] \to [\mathbf{B}'|\mathbf{b}'].$$

Tehát ekvivalens átalakításokkal az egyik egyenletrendszer átvihető a másikba:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{a}] \to [\mathbf{A}'|\mathbf{a}'] \to [\mathbf{B}'|\mathbf{b}'] \to [\mathbf{B}|\mathbf{b}].$$

2.20. Igen, a megoldás *a)* $(2,-2,3)$. *b)* $(0,-1,5)$.

2.21. Ha az egyenletrendszernek van legalább három sora, akkor – mivel bármely két szomszédos sor különbsége azonos – az első két sor lineáris kombinációjaként megkapható az összes többi, így nem tudunk $n>2$ esetén n független egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszert fölírni, hogy csak egyetlen megoldása legyen. Ha $n=2$, akkor a bővített mátrix és annak lépcsős alakja

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ahol a tetszőleges, $d\neq 0$. Innen a megoldásvektor $(-1,2)$. (Két ismeretlen, de kettőnél több egyenlet esetén, $d\neq 0$ mellett két független egyenlet lesz, melyek ugyanezt a megoldást adják).

2.22. Mind a négy egyenlet megfelelő helyettesítéssel a következő lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$2X + 2Y = 8$$
$$3X + \ Y = 4$$

Ennek megoldása $X = 0$, $Y = 4$. Innen *a)* $(x, y) = (0, 16)$, *b)* két megoldás van: $(0, 2)$ és $(0, -2)$, *c)* ez az egyenletrendszer nem oldható meg, mivel a $e^x = 0$ egyenlet nem oldható meg, *d)* ez az egyenletrendszer sem oldható meg, mivel a $\cos x = 4$ egyenlet nem oldható meg (a valós számok körében).

2.23. Jelölje az 1, 5 és 10 Ft-osok számát rendre x, y és z. A feladat a következő egyenletrendszerre vezet:

$$x + \ y + \ z = 11 \qquad (2.6)$$
$$x + 2y + 5z = 53 \qquad (2.7)$$

Ennek megoldásai $(x, y, z) = (\frac{1}{2} + \frac{5}{4}t, \frac{21}{2} - \frac{9}{4}t, t)$. A 10 Ft-os érmék száma legfőljebb 5, így elég a $t = 1, 2, \ldots, 5$ értékeket kipróbálni. Az egyetlen megoldás, amely pozitív egészekből áll, azaz ahol minden érme darabszáma pozitív egész: $x = 3$, $y = 6$, $z = 2$. (Ha észrevesszük, hogy csak úgy kaphatunk egész megoldásokat, ha t néggyel osztva kettő maradékot ad, akkor a $t = 2$ eseten kívül más megoldás nem is jöhet szóba.)

2.24. 10 gigaflops $= 10 \cdot 10^9$ flops, így

$$n^3 + 1000n = (10^4)^3 + 1000(10^4) = 10^{12} + 10^7,$$
$$n^3 - 100n^2 = (10^4)^3 - 100(10^4)^2 = 10^{12} - 10^{10},$$

vagyis $(10^{12} + 10^7)/10^{10} = 100.001$, ill. $(10^{12} - 10^{10})/10^{10} = 99$ másodperc a két futási idő.

2.25. *a)* igaz, *b)* hamis, de pl. ortonormált bázisban igaz, *c)* igaz, *d)* hamis, a sík normálvektora $(A, B, 0)$, *e)* igaz, ui. az

$$(x, y, z, w) = (1, -1, 0, 0)t + (0, 0, 1, -1)s$$

explicit egyenlet egy sík egyenlete, *f)* igaz, *g)* igaz, ha $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ jelöli az alakzat egy általános pontját, *h)* igaz, például az $x = 0$, $y = 0$ egyenletrendszerű sík, és $z = 0$, $w = 0$ egyenletrendszerű sík egytlen közös pontja a $(0, 0, 0, 0)$ pont.

2.26. Egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pont harmadik koordinátája megegyezik a rajta átfektetett és az első két koordinátatengellyel párhuzamos sík harmadik koordinátatengellyel való metszéspontjának koordinátájával. Ezért a feladatbeli sík minden pontjának $(a, b, 5)$ a koordinátás alakja, ahol a és b valósok, másrészt az ilyen alakú pontok mind e síkon vannak. Tehát olyan egyenletet keresünk, amelyben az ismeretlenek x, y és z, továbbá x és y értéke tetszőleges valós szám, z pedig csak 5 lehet.

Implicit egyenlet a $z = 5$, azaz $0x + 0y + z = 5$, az explicit vektoregyenlet és explicit egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= t \\ z &= 5, \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.27. *a)* Több megoldás is lehetséges. Ha $t = x$-et választjuk paraméternek, akkor $x = t$, $y = 1 - t$, amiből a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

Az y-t választva paraméternek

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

b) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} t.$$

Az $x = 3t$-t választva paraméternek

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} t.$$

c) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

d) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

e) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

f) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

A $w = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

2.28. *a)* $x = t$, $y = 1 - t$ *b)* $x = s$, $y = t$, $z = 1 - s - t$ *c)* $x = s$, $y = 1 - s$, $z = t$

d) $x = r$, $y = s$, $z = t$, $w = 1 - r - s - t$ *e)* $x = r$, $y = 1 - r$, $z = s$, $w = t$ *f)* $x = 1$, $y = r$, $z = s$, $w = t$

2.29. A paraméterválasztástól függően több különböző alakba is felírható bármelyik megoldás, néhányat megadunk példaként.

a) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2/3\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1/3\\0\\1\end{bmatrix}$ vagy

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$ vagy

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{a}\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{bmatrix}$, ha $a \neq 0$,

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{b}\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\-\frac{c}{b}\\1\end{bmatrix}$, ha $a = 0$, $b \neq 0$,

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{c}\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, ha $a = b = 0$, $c \neq 0$.

d) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-3\\-3\\0\\1\end{bmatrix}.$

e) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}.$

f) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}.$

g) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\0\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$

2.30. A térbeli egyenes korábban már igazolt

$$x = x_0 + ut$$
$$y = y_0 + vt$$
$$z = z_0 + wt$$

egyenletrendszerében küszöböljük ki a t paramétert! Beszorozva az első egyenletet v-vel, a másodikat u-val, majd kivonva a második egyenletet az elsőből kapjuk, hogy $vx - uy = vx_0 - uy_0$. Az első és harmadik egyenletből $wx - uz = wx_0 - uz_0$, a második és harmadik egyenletből $wy - vz = wy_0 - vz_0$ adódik. Átrendezve a (2.21)-et kapjuk.

Mivel $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, így legalább az egyik koordináta nem 0. Ha pl. $u \neq 0$, $v = w = 0$, akkor az egyenletrendszer az $y = y_0$ és $z = z_0$ egyenletekből áll, ez valóban két különböző és biztosan nem párhuzamos sík egyenlete, metszetük egy egyenes. (A harmadik egyenlet $0 = 0$ alakú, elhagyjuk.)

Ha u, v és w közül pontosan egy értéke 0, akkor két egyenlet azonos, így egyikük elhagyható. Például ha $u \neq 0$, $v \neq 0$, de $w = 0$, akkor az egyenletek alakja

$$v(x - x_0) = u(y - y_0)$$
$$z = z_0$$
$$z = z_0.$$

Ha az irányvektor egyik koordinátája sem 0, akkor három sík egyenletét kapjuk, melyek közül semelyik kettő sem párhuzamos a bennük szereplő változók különbözősége miatt. Bármelyik kettő metszete egy egyenes, és mivel mindhárom metszete is az adott egyenes, ezért bármelyik két egyenlet megtartható.

A tétel úgy is igazolható, hogy a (2.21) három egyenlete lineárisan összefügg, hisz az első egyenlet w-szerese mínusz a második v-szerese plusz a harmadik u-szorosa a $0 = 0$ egyenletet adja. Ez a vektoroknál látotthoz hasonlóan azt jelenti, hogy valamelyik egyenlet előáll a másik kettő lineáris kombinációjaként, ez pedig elhagyható, hisz ha egy pont kielégíti a másik két egyenletet, akkor a lineáris kombinációjukat is.

2.31. *a)* Az explicit egyenletrendszer $x = 2 + t$, $y = 1 + 3t$, a vektoregyenlet

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} t.$$

Az implicit egyenletek $3(x-2) = y - 1$, $(3, -1) \cdot (x - 2, y - 1) = 0$, $(3, -1) \cdot (x, y) = 5$, $3x - y = 5$.

d) $x = 3$, $y = 4$,

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}.$$

g) Az $A(1,1,1,1)$ ponton átmenő, $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ irányvektorú egyenes explicit vektoregyenlete és explicit egyenletrendszere

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad \begin{aligned}x &= 1 + t\\ y &= 1 + 2t\\ z &= 1 + t\\ w &= 1 + 3t.\end{aligned}$$

Az implicit egyenletrendszerek megkaphatók a t kifejezésével az előző egyenletrendszerből:

$$x - 1 = \frac{y-1}{2} = z - 1 = \frac{w-1}{3}.$$

Innen három *független* egyenlet kiválasztása többféleképp is lehetséges, egyik például a következő:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1\\ x - z &= 0\\ 3x - w &= 2.\end{aligned}$$

2.32. *a)* A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\mathbf{u} = (2,1,4) - (0,-1,2) = (2,2,2), \text{ és}$$
$$\mathbf{v} = (-1,0,7) - (0,-1,2) = (-1,1,5).$$

Ezek alapján például az $\mathbf{x}_0 = (0,-1,2)$ választás mellett a sík egyenletei megegyeznek a 2.43. példában leírtakkal, mivel ugyanarról a síkról van szó.

c) Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható a sík egyenlete:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kiküszöbölve az s és t paramétereket két egyenletet kaphatunk, például

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z \quad &= 2 \\ y - 5z + w &= -3. \end{aligned}$$

2.33. *a)* $\overrightarrow{AB} = (0,1,2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,0,1,1)$. Innen a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Az explicit egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= \quad\quad s \\ y &= 1 + \quad r + s \\ z &= 1 + 2r \quad\quad + t \\ w &= 1 + 3r \quad\quad + t \end{aligned}$$

Ebben az explicit egyenletrendszerben keressünk három olyan egyenletrendszert, melyek megoldhatók az r, s, t ismeretlenekre nézve, és ezeket helyettesítsük be a negyedik egyenletbe. Eredményül az

$$x - y - z + w = 1$$

egyenletet kapjuk, mely a hipersík implicit egyenlete.

b) $\overrightarrow{AB} = (0,1,2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (0,1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,0,1,1)$. Innen a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Az implicit egyenlet $x = 0$.

c) $\overrightarrow{AB} = (0,1,0,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,0,1,1)$. Innen a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Az implicit egyenlet $y + z = 0$.

2.37. *a)* A sormodellben két metsző egyenest kell megrajzolni ($y = 7/3x - 2/3x$, $y = -2 + 3/2x$), melyek a $(2,1)$ pontban metszik egymást, míg az oszlopmodellben a $(2,3)$, a $(3,-2)$ vektorokat és azok lineáris kombinációjaként előállított $(7,4) = 2(2,3) + (3,-2)$ vektort!

b) A sormodellben két párhuzamos egyenest kell megrajzolni, míg az oszlopmodellben a $(2,3)$ és a $(4,6)$ vektorokat, melyek egy egyenesbe esnek, és semmilyen lineáris kombinációjuk sem adja ki a $(3,4)$ vektort!

2.38. A három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos, másrészt a normálvektorai egy síkba esnek, ui. $2(1,1,2) + (1,2,4) = (3,4,8)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan vektor, mely mindhárom síkkal párhuzamos. Az első esetben a három sík egy egyenesen megy át, mivel van a síkoknak közös pontjuk, pl. a $(3,0,0)$ pont, így végtelen sok megoldása is van, míg a második esetben a síkoknak nincs közös pontjuk.

Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x + y - z = 0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a $(3,3,9)$ vektor is benne van e síkban, a $(3,3,1)$ vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem.

2.39. A sormodell szerinti ábra az *a)* esetben 3 síkbeli egyenest tartalmaz, melyek közt van két párhuzamos, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* esetben a három egyenes egy ponton megy át, ez a megoldás: $x = 2$, $y = 1$. A *c)* esetben ugyan nincsenek párhuzamos egyenesek, de nincs közös pontjuk sem, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Az

oszlopmodell szerint az *a)*

$$\begin{aligned} x+\ \ y &= 3\\ x+\ \ y &= 4\\ x+2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}.$$

Az $(1,1,1)$ és az $(1,1,2)$ vektorok benne fekszenek az $x=y$ egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A $(3,4,4)$ vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* és *c)* egyenletrendszerekben a bal oldali két vektor, az $(1,1,1)$ és az $(1,2,3)$ az $x-2y+z=0$ egyenletű síkban van, melyben a $(3,4,5)$ vektor benne van, míg a $(3,3,5)$ vektor nincs benne, tehát *b)* megoldható, *c)* nem.

2.40. *a)* hamis, az állítás csak úgy igaz, ha a párhuzamos hipersíkok különbözőek is (két azonos hipersíkot párhuzamosnak tekintünk), *b)* hamis, például a 2.13. *(a)* ábrán látható esetben nincsenek párhuzamos síkok, és mégsincs megoldás, *c)* igaz, mert akkor a jobb oldalon álló bármely vektor kifejezhető e két kétdimenziós vektor lineáris kombinációjaként, tehát az egyenletrendszer megoldható.

2.41.

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **három**dimenziós térben **két** darab **síkból** áll, melyek ha **párhuzamosak, de nem azonosak**, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma **végtelen**. Oszlopmodellje a **két**dimenziós térben **négy** darab **vektorból** áll (három lineáris kombinációja a negyedik).

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **két**dimenziós térben **három egyenesből** áll, míg az oszlopmodellje a **három**dimenziós térben **három** darab **vektorból**.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra az **öt**dimenziós térben **négy** darab **hipersíkból** áll. Oszlopmodellje a **négy**dimenziós térben **hat** darab **vektorból** áll.

2.42. Mindegyik állítás hamis.

2.43. *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis, csak akkor igaz, ha egyik a másik altere. *d)* Igaz.

2.44. *a)* Hamis, csak a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotnak vektorteret. *b)* Igaz. *c)* Igaz. Ez épp az oszloptér, ui. csak az oszloptérből való $\mathbf{b}$ vektorokra oldható meg az egyenletrendszer. *d)* Igaz. Ez épp az együtthatómátrix nulltere, azaz az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza.

2.45. *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz, ui. az állításbeli $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})\le\mathrm{r}(\mathbf{A})$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$, és ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenletrendszer megoldható. *e)* Hamis, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$, és az egyenletrendszer több, mint n egyenletből áll, akkor előfordulhat, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})=n+1$, és ekkor az egyenletrendszer nem oldható meg!

2.46. Hozzuk a bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\1&a&1&a\\a&1&1&a^2\end{array}\right]\overset{\substack{S_2-S_1\\S_3-aS_1}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&a-1\\0&1-a&1-a^2&a^2-a\end{array}\right]$$

$$\overset{S_3+S_2}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&a-1\\0&0&-(a-1)(a+2)&(a+1)(a-1)\end{array}\right].$$

Látható, hogy $a=1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, tehát az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja is 1, így az egyenletrendszer az $x_1+x_2+x_3=1$ egyenlettel ekvivalens. Ennek megoldása: $(x_1,x_2,x_3)=(1-s-t,s,t)$, oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Ha $a=-2$, akkor az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg (az utolsó sor egyenletté visszaírva $0=3$ alakú). Minden egyéb esetben, azaz ha $a\neq1$ és $a\neq-2$, akkor a két rang 3, ami megegyezik az ismeretlenek számával, tehát egyetlen megoldás van. Mivel $a-1\neq0$, ezért oszthatjuk vele a második sort, és $a+2\neq0$, ezért $-(a-1)(a+2)$-vel oszthatjuk a harmadik sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-\frac{a+1}{a+2}\end{array}\right]\overset{\substack{S_1-S_2\\S_2-S_3}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&a+1&0\\0&1&0&\frac{1}{a+2}\\0&0&1&-\frac{a+1}{a+2}\end{array}\right]$$

$$\overset{S_1-(a+1)S_3}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{(a+1)^2}{a+2}\\0&1&0&\frac{1}{a+2}\\0&0&1&-\frac{a+1}{a+2}\end{array}\right].$$

Innen a megoldás leolvasható:

$$x_1=\frac{(a+1)^2}{a+2},\quad x_2=\frac{1}{a+2},\quad x_3=-\frac{a+1}{a+2}.$$

2.47. *a)* Nem, például az $(1,1,1)$ vektor benne van e halmazban, azonban kétszerese nem. *b)* Nem, egységvektor konstansszorosai nem egységvektorok. *c)* Igen (origón átmenő sík). *d)* Nem (eltolt sík). *e)* Igen, ez egy origón átmenő egyenes vektoraiból

áll. *f)* Nem, a $\mathbf{0}$ vektor nincs a vektorhalmazban, ui. az $s+2t=0$, $s-1=0$, $2s+t=0$ egyenletrendszer inkonzisztens. *g)* Igen, ez a zérustér. *h)* Nem, az $(1,-1,0)$ és az $(1,0,-1)$ vektor benne van, de az összegük nincs e halmazban.

2.48. Ha $\mathcal{W}\leqslant\mathcal{V}$, akkor $\mathcal{W}$ zárt az vektorösszeadás és skalárral szorzás műveleteire, így $\mathcal{W}$-beli vektorok bármely lineáris kombinációja is $\mathcal{W}$-beli. Fordítva, ha $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ egy *nem üres* vektorhalmaz, mely zárt a lineáris kombinációra nézve, akkor zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra (mint speciális lineáris kombinációra) nézve, azaz zárt a vektortér műveleteire. Másrészt e vektorok elemei a $\mathcal{V}$ vektortérnek, így igazak rájuk a vektorteret definiáló műveleti azonosságok. Tehát $\mathcal{W}$ vektortér.

2.49. *a)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})\leq 1$. A 0 rang csak úgy fordulhat elő, ha az összes egyenlet $0=0$ alakú – nem egy érdekes eset. Ha a rang 1, akkor a kötött és a szabad változók száma is 1. *b)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})=5$. *c)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})=3$. *d)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})=2$.

2.50. Két megoldásvektor különbsége, azaz az $(1,2,3)-(0,1,3)=(1,1,0)$ vektor biztosan megoldása az egyenletrendszer homogén részének. Akkor viszont ennek minden skalárszorosa is megoldás, így azokat bármelyik fenti megoldáshoz adjuk, újabb megoldásokat kapunk. Például megoldás az $(1,2,3)+(1,1,0)=(2,3,3)$ és az $(1,2,3)+2(1,1,0)=(3,4,3)$ vektor is.

Mivel az ismeretlenek száma 3, és azok legalább egyike szabad változó, ezért a rang legföljebb 2. Ha viszont e megoldások egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, akkor a megoldások közt van legalább két lineárisan független megoldás, így a szabad változók száma legalább kettő, vagyis a kötötteké legföljebb 1, tehát az együtthatómátrix rangja is legföljebb 1.

2.51. Első ránézésre csak annyi látszik, hogy mindkét megoldás egy kétdimenziós altér eltoltja. Először megvizsgáljuk, hogy a két altér – vagyis az egyenletrendszer homogén részére adott két megoldás – egybeesik-e. Elég megmutatni, hogy az egyik altérben benne van a másikat generáló két vektor. Ha igen, a két altér megegyezik. Ezesetben el kell dönteni, hogy az inhomogén két partikuláris megoldása az altérnek ugyanabban az eltoltjában van-e. Vagy egyszerűbben, hogy a két partikuláris megoldás különbsége benne van-e az altérben. E kérdéseket egyetlen mátrix lépcsős alakra hozásával is megoldhatjuk. Az első két oszlop az első, a második két oszlop a második altér generátorait tartalmazza, az ötödik oszlop a két partikuláris megoldás különbsége.

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az eredményből látszik, hogy a két megoldás azonos.

2.52. Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ és $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{a}_1y_1+\mathbf{a}_2y_2+\ldots+\mathbf{a}_ny_n=\mathbf{0},$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x}+d\mathbf{y}$ is megoldás, ui.

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(cx_1+dy_1)+\mathbf{a}_2(cx_2+dy_2)+\ldots+\mathbf{a}_n(cx_n+dy_n)\\&=(c\mathbf{a}_1x_1+d\mathbf{a}_1y_1)+(c\mathbf{a}_2x_2+d\mathbf{a}_2y_2)+\ldots\\&\quad+(c\mathbf{a}_nx_n+d\mathbf{a}_ny_n)=c(\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n)\\&\quad+d(\mathbf{a}_1y_1+\mathbf{a}_2y_2+\ldots+\mathbf{a}_ny_n)=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

azaz $c\mathbf{x}+d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat.

2.53. Legyen $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x}+\mathcal{H}=\mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x}+\mathcal{H}\subseteq\mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in H$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, ill. $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{b},\ \text{ill.}$$
$$\mathbf{a}_1y_1+\mathbf{a}_2y_2+\ldots+\mathbf{a}_ny_n=\mathbf{0}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(x_1+y_1)+\mathbf{a}_2(x_2+y_1)+\ldots+\mathbf{a}_n(x_n+y_1)\\&=(\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n)\\&\quad+(\mathbf{a}_1y_1+\mathbf{a}_2y_2+\ldots+\mathbf{a}_ny_n)\\&=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b},\end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathcal{I}$.

$\mathbf{x}+\mathcal{H}\supseteq\mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z}\in\mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y}\in\mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y}=\mathbf{z}-\mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(z_1-x_1)+\mathbf{a}_2(z_2-x_1)+\ldots+\mathbf{a}_n(z_n-x_1)\\&=(\mathbf{a}_1z_1+\mathbf{a}_2z_2+\ldots+\mathbf{a}_nz_n)\\&\quad-(\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n)\\&=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z}-\mathbf{x}\in\mathcal{H}$.

2.54. Az első két állítás a 2.75. tétel egyszerű következménye.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k-adik sorvektorát. Főeleme legyen a j-edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k-nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j-edik koordináta 0. A

k-nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k-adik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai **B**-ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előzőkből adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok **A**-ban is lineárisan függetlenek.

2.55. 1. Igaz. 2. Igaz, bármely 1 dimenziós vektortér ilyen. 3. Hamis, ha van kételemű bázis, akkor a lineárisan független vektorrendszerek elemszáma legföljebb 2. 4. Igaz, bármely 1 dimenziós vektortér ilyen. 5. Igen, egy generátorrendszer több vektorból is állhat, mint a dimenzió.

2.56. A mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk a $\mathbf{w}_1 = (1,3,6,2)$ és a $\mathbf{w}_2 = (1,2,3,0)$ vektorokat. A többi vektor kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként, ami leolvasható a redukált lépcsős alakból: $\mathbf{w}_3 = -3\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_4 = -4\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2$. Így ebben a $\mathcal{C}$ bázisban a négy vektor koordinátás alakja rendre

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}, \qquad \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}},$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}, \qquad \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}.$$

2.57. A megadott vektorokból mint oszlopvektorokból mátrixot képzünk, majd annak redukált lépcsős alakjából leolvassuk a választ: a bázisoszlopoknak megfelelő vektorok adják a bázist, és az összes vektor koordinátás alakja e bázisban megegyezik a lépcsős alakbeli oszloppal.

a) A mátrix és redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Így bázisnak választható az első és harmadik vektor: $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(1,1,1)\}$, és e bázisban a vektorok koordinátás alakja rendre $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,-1)$, $(-13,)$.

b) Mivel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért a bázis a megadott vektorokból áll, és e bázisban e vektorok koordinátás alakjai a standard bázisvektorok lesznek.

c) A válasz az *a)* feladathoz hasonlóan leolvasható a redukált lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.58. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ vektorait egymás után írjuk egy mátrixba, majd redukált lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Így az első három oszlop bázisoszlop, tehát a $\operatorname{span}(\mathcal{A}) + \operatorname{span}(\mathcal{B})$ tér 3 dimenziós, egy bázisa $\{(1,0,0,1),(2,1,0,2),(1,0,0,0)\}$.

2.59. Olyan $\mathbf{x}$ vektorokat keresünk, melyekre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. A sormodellnek megfelelően e két egyenletből álló egyenletrendszer együtthatómátrixa és annak egy lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s-2t, (s-3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát a sorvektorokból képzett mátrix nulltere.

2.61. *a)* Merőlegesek, *b)* nem merőleges kiegészítő alterek.

2.63. Mivel az egyenletrendszer 3 ismeretlenes, és a rang 2, ezért a kötött változók száma 2, a szabad változóké 1, és így a nulltér dimenziója is 1. A két vektor független egymástól, tehát az egyenletrendszer nem lehet homogén, akkor ui. legalább kettő lenne a nulltér dimenziója. Az egyenletrendszer tehát inhomogén, és a megadott két megoldás különbsége a homogén rész egy megoldását adja, annak összes skalárszorosa pedig az összes megoldását. Így az inhomogén összes megoldása: $(1,2,3) + t(1,1,0)$.

2.64. Például $(1,2,3,4) + s(1,1,0,0) + t(1,1,1,1)$.

2.65. E mátrix rangja pontosan akkor k, ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, azaz ha az oszlopvektorok bármely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nullvektor, ha minden együttható 0. Tekintsünk az oszlopvektorok egy $c_1,\ldots,c_k$ skalárokkal vett, nullvektort adó lineáris kombinációját. Ennek i-edik koordinátája

$$\begin{aligned} 0 &= c_1\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{v}_i \cdot (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$ vektor olyan, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok mindegyikével vett skaláris szorzata 0, így ezek bármelyik lineáris kombinációjával vett skaláris szorzata is 0, tehát például az $\mathbf{x}$ vektorral vett szorzat is 0, azaz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Ez viszont csak $\mathbf{x} = 0$ esetén állhat fönn, és mivel a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, csak a $c_i = 0$ konstansokkal vett lineáris kombinációjuk lehet 0, ahol $i = 1, 2, \ldots, k$.

2.66. *a)* Az egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

így a megoldása $(x, y, z) = (-1, 4, 0) + (2, -3, 1)t$. A nullteret a $(2, -3, 1)$ vektor feszíti ki, a sortérbe eső vektornak erre merőlegesnek kell lennie, tehát fönn kell állnia a

$$2x - 3y + z = 0$$

egyenletnek is. Ezt az egyenletet a redukált lépcsős alakból származó egyenletrendszerhez (vagy akár az eredetihez) adva egy egyetlen megoldást adó egyenletrendszert kapunk. Ennek bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1)$.

b) A sortérbe eső megoldás meghatározása egyetlen egyenlet esetén egyszerű. Mivel a sorteret az $(1, 4, 8, 12)$ vektor feszíti ki, ennek egy skalárszorosát keressük, mellyel vett skalárszorzata 225. Mivel $1^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 = 15^2 = 225$, ezért a sortérbe eső egyetlen megoldás $(x, y, z, w) = (1, 4, 8, 12)$. A homogén egyenletrendszer összes megoldását meghatározva majd hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

az összes megoldás.

c) A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - s \\ s \\ 1 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Tehát a nullteret a $(-1, 1, 0, 0)$ és a $(0, 0, -1, 1)$ vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges, tehát az eredeti egyenleteken kívül kielégíti a következő két egyenletet is:

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned}$$

Ezek mátrixával kibővítve a redukált lépcsős alakot, majd azt redukált lépcsős alakra hozva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

tehát a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1/2, 1/2)$, az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

2.67. Ha a két mátrixot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ jelöli, akkor

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}^\mathsf{T} \mid \mathbf{B}^\mathsf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen azonnal leolvasható, hogy $\mathcal{S}(\mathbf{A}) + \mathcal{S}(\mathbf{B}) \leqslant \mathbb{R}^5$ vektortér egy bázisa az $\mathbf{A}$ első három sorából és a $\mathbf{B}$ első sorából áll (azaz $[\mathbf{A}^\mathsf{T} \mid \mathbf{B}^\mathsf{T}]$ bázisoszlopaiból, és ezek az első, második, harmadik és ötödik oszlopok). A két sortér összege tehát 4 dimenziós.

Első lépésként – bár ez nem volt kérdés – kiszámolhatjuk a metszet dimenzióját az eddigiek alapján. Mivel $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{S}(\mathbf{B})) = 3$, és $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V})$, ezért $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})) = 3 + 3 - 4 = 2$.

A $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \leqslant \mathbb{R}^5$ altér vektorai azok, melyek előállnak mind $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, mind $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként. Így tehát $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$ pontosan akkor áll fenn, ha van olyan $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektor, hogy $\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, azaz

$$[\mathbf{A}^\mathsf{T} | \mathbf{B}^\mathsf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

E homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\begin{bmatrix} s + 3t + u \\ -s - 3t - u \\ u \\ s \\ t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

A megoldásvektor első 4 koordinátája $\mathbf{x}$, a második három pedig $-\mathbf{y}$. Első ránézésre hibát sejtünk, hisz

a megoldás 3 paraméteres, miközben nekünk 2 dimenziós teret kell kapnunk! De ha alaposan megnézzük az eredményt, akkor láthatjuk, hogy $-\mathbf{y} = \mathbf{0}s + (1,1,0)t + (0,0,1)u$, azaz s nem játszik szerepet. Így a metszet bázisvektorai lehetnek a $\mathbf{B}^\mathsf{T}(1,1,0)$ és a $\mathbf{B}^\mathsf{T}(0,0,1)$ (vagy ezek ellentettjei), azaz a $(3,3,3,3,3)$ és az $(1,0,1,0,1)$ vektorok. Sőt, kicsit egyszerűsíthetünk, választhatjuk bázisnak az $(1,1,1,1,1)$ és az $(1,0,1,0,1)$ vektorokat. (Annak ellenőrzését, hogy az s paraméter akkor sem okozna gondot, ha az $\mathbf{x}$ vektorral számolnánk, az Olvasóra hagyjuk.)

2.68. *a)* Az ismétlőkód vektorai az $(1,1,\dots,1) \in \mathbb{F}^n$ skalárszorosai, melyek egy 1 dimenziós $\mathcal{W}$ alteret alkotnak $\mathbb{F}^n$-ben. A nullösszegű kód vektorai azonosak az $(1,0,\dots,0,-1)$, $(0,1,0,\dots,0,-1)$,…, $(0,\dots,0,1,-1)$ vektorok által kifeszített altérrel, és ez az $n-1$ dimenziós vektortér épp a $\mathcal{W}$ vektoraira merőleges vektorokból áll, ui.

$$(a,a,\dots,a)\cdot(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},-\sum_{i=1}^{n-1}a_i)=0$$

tetszőleges $a,a_i \in \mathbb{F}$ $(i=1,2,\dots,n-1)$ esetén.

b) A nullösszegű kód legfeljebb egy hibát jelez, ami azt jelenti, hogy ha pontosan egy hiba történik, akkor az ellenőrző összeg hibás lesz, vagy másként fogalmazva a koordináták összege nem lesz 0. Természetesen jelezhet e kód több hibát is, de ezt már nem tudjuk garantálni, hisz több hiba már kiolthatja egymást, pl. a $(0,0,1,1) \in \mathbb{F}_2^4$ kódszónak tűnik, bár lehet, hogy a $(0,1,0,1)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,1)$, $(0,0,0,0)$ szavak valamelyikében történt két hiba vagy az $(1,1,0,0)$ szóban négy hiba.

Speciálisan az $\mathbb{F}_2^n$ nullösszegű kódszavai azok, melyekben pontosan páros sok 1-es van, azaz az ellenőrző összeg pontosan akkor 1, ha páratlan sok 1 van az üzenetvektorban, ezért e kódot szokás paritásellenőrző kódnak is nevezni. E kód jelez minden páratlan sok hibát, de páros sok hibát nem.

Az ismétlőkód legfeljebb $n-1$ hibát jelez. (Viszont ha pl. az $(a,a,\dots,a)$ kód a $(b,b,\dots,b)$ kódra változik, azt már nem jelzi hibának.) Legfeljebb $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ hibát ki is tud javítani, ahol $\lfloor x\rfloor$ az x alsó egészrészét jelenti. Pl. az (a,a,a,a,b) és a (a,a,a,b,b) kódszót ki tudja javítani, ha legföljebb két hiba történt, de ha három hiba is történhetett, akkor az (a,a,a,a,a) és a (b,b,b,b,b) szavak is lehetséges javítások, vagyis három hibát e kód már nem tud javítani.

2.69. *a)* A kód definíciójából világos, hogy egy $\mathbb{F}_2^7$-beli tetszőleges vektor pontosan akkor kódszó, ha a Venn-diagram mindegyik körében páros sok 1 van. Így ha a Venn-diagramot tetszőleges módon kitöltjük 0-kal és 1-esekkel, akkor mindig egyértelmű, hogy mely körökben van páratlan sok 1-es. Ha egyben sincs, akkor kódszót kaptunk. Ha a $I \subseteq \{1,2,3\}$ indexek egy nem üres halmaza, akkor a B_i $(i \in I)$ halmaz(ok) és a $\bar{B}_j$ $(j \notin I)$ hamaz(ok) metszetében lévő bit megváltoztatásával mindhárom körben párosra változik az 1-esek száma, azaz egyetlen bit megváltoztatásával kódszót kaptunk. Ez másként fogalmazva azt jelenti, hogy a 4-bites üzenethez rendelet 7-bites kódszavak olyanok, hogy ha egy bit megváltozik az üzenet elküldése során, akkor az kijavítható, vagyis ez egy 1-hibajavító kód.

b) Az összes kódszót megkapjuk, ha a $b_3b_5b_6b_7$ biteket szabadon megválasztjuk, ez $2^4 = 16$ lehetőség. Mind a 16 kódszóból egy-egy bit megváltoztatásával 7 további vektort kapunk, melyek nem kódszavak. Ezek azok a vektorok, melyek Hamming--távolsága a kódszótól pontosan 1. Így minden kódszó középpontja egy 1 sugarú „gömb"-nek, mely így 8 pontot tartalmaz. Mivel e gömbök lefedik az egész $\mathbb{F}_2^7$ teret, hisz minden vektor legföljebb 1 távolságra van egy kódszótól, és $16\cdot 8 = 128 = |\mathbb{F}_2^7|$, ezért e gömbök átfedésmentesen fedik le a teret. Tehát semelyik két különböző „gömb" nem metszi egymást, így középpontjaik távolsága legalább 3.

c) Ha volna két különböző kódszó, melyek legalább 5 helyen megegyeznének, akkor távolságuk 1 vagy 2 lenne, ami ellentmond az előző pontban bizonyítottaknak. Ez csak annyit jelent, hogy ha egy kódszóból törlünk tetszőleges 2 bitet, akkor azt egyértelműen meg tudjuk határozni, azt viszont nem jelenti, hogy tetszőleges 5 bit kiegészíthető kódszóvá (hisz az 5 bit már tartalmazhat paritáshibát).

Más a helyzet, ha 2 hiba történik. Ekkor ugyan van 5 helyes bit, de nem tudjuk melyik 5. Az előző pont szerint bármely két kódszó távolsága legalább 3, így két hiba nem adhat másik kódszót, vagyis a paritások jelzik, ha 2 hiba történt.

2.70. Mindegyik feladatban valamely $\mathbb{F}_q$ véges test elemei adják a kódábécé jeleit.

a) Ismétlő kód. A $\mathcal{C}$ kód az $(1,1,\dots,1)$ kódszó által generál egydimenziós altér $\mathbb{F}_q^n$-ben. Így e kód generátormátrixa $\mathbf{G}_I = [1\ 1\ \dots\ 1]$.
Nullösszegű kód. Az $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{F}_q^{n-1} \mapsto (a_1,\dots,a_{n-1},-\sum_{i=1}^{n-1}a_i) \in \mathbb{F}_q^n$ leképezés mátrixa

$$\mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mivel a két kód egymás duálisa, ezért a nullösszegű kód ellenőrző mátrixa $\mathbf{H}_N = \mathbf{G}_I = [1\ 1\ \dots\ 1]$, míg az ismétlő kódé $\mathbf{H}_I = \mathbf{G}_N$. Például ha az üzenet $x \in \mathbb{F}_q$, akkor az ismétlő kóddal kódolt üzenet

$$x\mathbf{G}_I = x\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & x & \dots & x\end{bmatrix}.$$

Bináris $[7,4,3]_2$ *Hamming-kód.* Tekintsük az

$$\mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^7 : (b_3,b_5,b_6,b_7) \mapsto (b_1,b_2,\dots,b_7)$$

leképezést, ahol

$$b_1 = b_3 + b_5 + b_7,$$
$$b_2 = b_3 + b_6 + b_7,$$
$$b_4 = b_5 + b_6 + b_7.$$

Ennek mátrixa

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Például az $\mathbf{x} = (0,1,1,0)$ üzenet kódja (a feladatban definiált vektorszor mátrix jelöléssel):

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{x}\mathbf{G}_H &= \sum_i x_i \mathbf{g}_i \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az ellenőrző mátrix vektorai merőlegesek a kódvektorok mindegyikére, így megoldásai a $\mathbf{G}$ együtthatójú homogén lineáris egyenletrendszernek, melyet ezesetben $\mathbb{F}_2$ fölött kell megoldani. A $\mathbf{G}$ mátrixban találunk olyan oszlopokat, melyekben csak egyetlen elem 1, a többi 0, így a lépcsős alakra hozásnál egyszerűbben is megkapható az összes megoldás: az ezekhez az oszlopokhoz tartozó változók legyenek a kötött, a többi a szabad változó (gondolhatjuk azt, hogy megfelelően megváltoztatjuk az ismeretlenek sorrendjét, és így a $\mathbf{G}$-ből kapott mátrix máris redukált lépcsős alakban van, majd a megoldás felírása után visszaállítjuk az eredeti sorrendet).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l}\text{(ne felejtsük:}\\ \mathbb{F}_2\text{-ben}\\ -1 = 1)\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s+t \\ u \\ s+u \\ t+u \\ s+t+u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ha az $(1,1,1,0,0,0,1)$ vektor kódszó, akkor merőleges az ellenőrző mátrix minden sorvektorára. Ez itt nem áll, mert

$$(1,1,1,0,0,0,1) \cdot (1,0,1,0,1,0,1) = 1$$
$$(1,1,1,0,0,0,1) \cdot (0,1,1,0,0,1,1) = 1$$
$$(1,1,1,0,0,0,1) \cdot (0,0,0,1,1,1,1) = 1,$$

tehát azt feltételezhetjük, hogy egy bit megváltozott a „zajos csatornán" az átküldés közben. Melyik lehet ez a bit? A skalárszorzatok mindegyik 1, így ha az $(1,1,1)$ vektort megtaláljuk az ellenőrző mátrix oszlopai között, akkor annak helye megadja azt a koordinátát, amelyet meg kell változtatnunk, hogy megkapjuk az eredeti kódszót. Esetünkben ez az utolsó oszlop, tehát az eredeti kódszó az $(1,1,1,0,0,0,\mathbf{0})$. Ez valóban kódszó, hisz ez épp a generátormátrix első sorvektora. Megjegyezzük, az ellenőrző mátrix oszlopai kiadják a 1-től 7-ig terjedő egészeket bináris alakban, sőt, épp nagyság szerinti sorrendben, így bármely $\mathbf{c}$ vektorra a $\mathbf{c}\mathbf{H}^\mathsf{T} = \sum_{i=1}^{7} c_i \mathbf{h}_i = \mathbf{r}$ vektor épp a hibás bit indexnek a bináris alakjában szereplő biteket tartalmazza (hh_i a $\mathbf{H}^\mathsf{T}$ mátrix i-edik sorvektora). Teszteljük ezt az állítást néhány $\mathbb{F}_2^7$-beli vektorral.

c) Mivel a homogén lineáris $[\mathbf{G}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszerben k a kötött és $n-k$ a szabad változók száma, hisz $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_q^{k\times n}$, ezért a megoldások terét kifeszítő független vektorok száma $n-k$, így a belőlük mint sorvektorokból képzett $\mathbf{H}$ mátrixra $\mathbf{H} \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times n}$.

d) A sorvektorszor mátrix jelölést a feladat bevezetőjében definiáltuk. Ennek mintájára a $\mathbf{G}\mathbf{H}^\mathsf{T}$ szorzaton azt a mátrixot értjük, melynek i-edik sora a $\mathbf{g}_i\mathbf{H}^\mathsf{T}$ sorvektor. A $\mathbf{O}_{m\times n}$ mátrix az $m \times n$-es csupa zéruselemből álló mátrix. Részletesen mindez a következő fejezet témája. A $\mathbf{G}$ nullterét $\mathbf{H}$ sorvektorai feszítik ki, ezért $\mathbf{g}_i\mathbf{H}^\mathsf{T} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\mathbf{h}_j = \mathbf{0}_{n-k}$, ahol $\mathbf{h}_j$ a $\mathbf{H}^\mathsf{T}$ mátrix j-edik sora. Így $\mathbf{G}\mathbf{H}^\mathsf{T} = \mathbf{O}_{k\times(n-k)}$. A $\mathbf{H}\mathbf{G}^\mathsf{T}$ kiszámításában is az előbbi kifejezésben is szereplő $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}h_{jk} = 0$ kifejezéseket kell kiértékelni, így $\mathbf{H}\mathbf{G}^\mathsf{T} = \mathbf{O}_{(n-k)\times k}$ is fennáll (ld. még a 3.36. tétel *d)* pontját).

e) A $\mathcal{C}$ duálisa a definícióból adódóan

$$\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n : \mathbf{v}\mathbf{G}^\mathsf{T} = \mathbf{0}\}.$$

A valós esethez hasonlóan igazolható, hogy $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$ (ui. a dimenziótétel véges test fölött is igaz, megjegyzendő viszont, hogy $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}^\perp$ a valós esettel ellentétben általában nem kiegészítő alterek). Így $\mathcal{C} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{F}_q^n : \mathbf{c}\mathbf{H}^\mathsf{T} = \mathbf{0}\}$.

f) Ha $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k|\mathbf{A}]$, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{F}_q^{k\times(n-k)}$, akkor $\mathbf{G}$ redukált lépcsős alakban van, így a $\mathbf{G}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak terét épp a $\mathbf{H} = [-\mathbf{A}|\mathbf{I}_{n-k}]$ sorai feszítik ki. Ez lesz tehát a duális kód generátormátrixa, azaz az eredeti kód ellenőrző mátrixa.

2.71. Ha a feladatot nem sikerült megoldani, akkor próbálkozzunk először 3 rabbal. Az első ötlet nyilván az, hogy a rabok kijelölnek maguk közül egy tippelőt, ő fog majd tippelni, a többiek passzolnak egy „nem tudom"-mal. Ekkor a megmenekülés esélye $\frac{1}{2}$. De három rabbal már a $\frac{3}{4}$ is elérhető! Hogyan?

A nyolc esetből hat esetben két sapka színe azonos, a harmadik különbözik tőlük. Ha tehát az algoritmusuk az, hogy aki két azonos színű sapkát lát, az ellenkező színűt tippeli, aki két különbözőt lát, passzol, akkor a nyolc esetből hatban megmenekülnek, az esély így $\frac{3}{4}$. Csak akkor nem menekülnek meg, ha mindenki fején azonos színű sapka van, ekkor viszont mindenki tippel, és mindenki rosszul. A nyolc esetből hatban egy-egy tipp hangzik el, ez hat helyes tipp, és két esetben három-három, azaz összesen hat rossz tipp. Mivel egyik rabnak sincs semmi információja a saját sapkája színéről, ezért mindenki $\frac{1}{2}$ eséllyel tippel jól, így a helyes és hibás tippek száma azonos kell hogy legyen! Ez itt fennáll! Ez egyúttal azt is igazolja, hogy ennél nagyobb esélyt adó algoritmus nincs, hisz ha nyolc esetben hétszer menekülnének meg, azaz lenne hét helyes tipp, akkor a hét hibás tippnek az egyetlen rossz esetben kéne elhangzania. Ez lehetetlen, mivel csak hárman vannak. Összefoglalhatjuk ezt az esetet úgy, hogy a három rab arra fogad, hogy a fejükön nem az ismétlőkód valamelyik szava van (PPP vagy FFF). A 3-hosszú ismétlő kód 1 hibát javít, így minden olyan esetben, amikor nem kódszó van a fejükön, akkor pontosan egy rab tudná azt javítani, de mivel arra fogadnak, hogy nem kódszó van a fejükön, e rab épp a javítással ellentétes színt tippeli.

Térjünk át a hét rab esetére. Hogyan általánosíthatjuk a három rab algoritmusát? Egy 1 hibát javító kód segítene! A 2.69. feladatban definiált Hamming-kód épp ilyen! A piros színnek feleltessük meg a 0, a feketének az $1 \in \mathbb{F}_2$ elemet. A 7 hosszú Hamming-kódban 16 kódszó van, és minden $\mathbb{F}_2^7$-beli vektor vagy egy kódszó, vagy van egyetlen kódszó, melytől való Hamming-távolsága 1, és minden más kódszótól való távolsága nagyobb 1-nél. Ezt az biztosítja, hogy a kód 1-hibajavító. A vektorok száma $2^7 = 128$, így annak esélye, hogy kódszó van a fejükön, $16/128 = 1/8$, tehát felcsillan a megmenekülés $\frac{7}{8}$-os valószínűségének esélye.

A rabok a következő algoritmusban egyeznek meg. Készítenek egy táblázatot a 16 kódszóról, amit mindegyikük megkap, és megegyeznek abban, hogy kihez melyik koordináta tartozik. Mindenki körülnéz, és megállapítja, hogy ő-e az, aki kódszóvá tudná tenni a az általa látott sapkák alapján kapott vektort. Aki úgy látja, hogy ő az, oly módon tippel, hogy ne kódszót adjon a tippje. Ha kódszó van a fejükön kiosztva, mindenki tippel, és mindenki rosszul, ha nem kódszó, akkor csak egyetlen rab tippel, hisz csak egyetlen koordináta megváltoztatásával tehető egy nem kódszó kódszóvá. A többi rab ekkor tehát passzol. A hibás tippek száma $16 \cdot 7 = 112$, a jó tippek száma $(128 - 16) \cdot 1 = 112$. Ebből a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy $\frac{7}{8}$-nál nagyobb valószínűség 7 rab esetén semmilyen algoritmussal nem érhető el.

E feladat általánosítható $2^n - 1$ rab esetére. Igazoljuk, hogy $n \to \infty$ esetén a megmenekülésük esélye 1-hez konvergál!