10.1. A mátrixok gráfját fölrajzolva látjuk, hogy csak **A** reducibilis, így az nem is primitív, a többi irreducibilis. A **B** mátrix pozitív, így primitív is. $\mathbf{C}^3 = \mathbf{I}$, így $\mathbf{C}^{3m} = \mathbf{I}$, tehát **C** egyik hatványa sem lesz pozitív, tehát **C** imprimitív. A **D** mátrix ugyan irreducibilis, de négyzete

$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

már nem, így a $\mathbf{D}^{2m}$ hatványok sem, tehát **D** egyik hatványa sem lesz pozitív, így **D** is imprimitív. Fontos megjegyezni, hogy ugyan $\mathbf{D}^2$-nek van pozitív elem a főátlóján, de ez nem implikálja hogy **D** primitív, mivel maga $\mathbf{D}^2$ nem irreducibilis! Az **E** mátrix irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem, ezért primitív. Az **F** mátrixra $\mathbf{F}^2$ irreducibilis és van a főátlóján pozitív elem, ui.

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 416 & 0 \\ 0 & 736 & 273 \\ 672 & 0 & 736 \end{bmatrix},$$

így $\mathbf{F}^2$ primitív, de akkor **F** is.

Ha a legkisebb k kitevőt keressük, melyre $\mathbf{F}^k$ pozitív, akkor az ötödik hatványig kell elmenni:

$$\mathbf{F}^5 = \begin{bmatrix} 6429696 & 3634176 & 7042048 \\ 11375616 & 12859392 & 14843936 \\ 5870592 & 17334272 & 12859392 \end{bmatrix} > \mathbf{O}.$$

E helyett sokkal egyszerűbben is eljárhatunk: elég ui. csak azt nézni, hogy egy hatványban egy elem 0 vagy nem, azaz az **F** helyett csak azzal a logikai értékeket tartalmazó $\hat{\mathbf{F}}$ mátrixszal kell számolni, melyet **F**-ből úgy kapunk, hogy a pozitív elemeket 1-re cseréljük (1, ha az elem pozitív, 0, ha nem). Így a mátrixszorzásokban végzett elemek közti szorzások helyett az 'és' (AND), az összeadások helyett a 'vagy' (OR) logikai műveletet elég elvégezni. E számolással az **F**-hatványok elemeinek pozitivitása leolvasható a következő sorozatból:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát innen is látható, hogy $\mathbf{F}^5 > \mathbf{O}$, vagyis **F** primitív. Ha csak a primitivitás eldöntése a feladat, még e számoláson is sokat gyorsíthatunk, ha mindig az előző eredményt emeljük négyzetre. Ekkor persze nem tudjuk meg, hogy melyik az a legkisebb hatvány, amely már pozitív. Az **F** mátrix esetén a következő sorozatot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{F}^8 > \mathbf{O}$, tehát **F** primitív.

a) E példa tanulságait összefoglalandó elsőként kiemeljük, hogy a primitivitás eldöntésében gyakran elég az adott mátrix helyett az annak megfelelő 0-1-mátrixot vizsgálni, és szükség esetén a mátrixszorzásban az elemek közti szorzást az OR, az összeadást az AND műveletre cserélve számolni.

b) A **C** mátrixhoz hasonlóan megmutatható, hogy a permutáló mátrixok nem primitívek.

c) Nyilvánvaló, hogy ha egy nemnegatív mátrix k-adik hatványa pozitív, akkor minden k-nál nagyobb hatványa is pozitív. A **C** és **D** mátrixoknál ezt kihasználtuk azzal, hogy mutattunk végtelen sok nem pozitív hatványt, mellyel bizonyítottuk, hogy nem primitív.

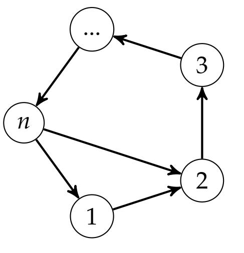
d) A **D** mátrix azt mutatja, hogy irreducibilis mátrix hatványa lehet reducibilis, kizárva ezzel annak lehetőségét, hogy primitív legyen.

10.2. Ha a gráfja egyetlen Hamilton-kör, akkor irreducibilis, ha több diszjunkt körre bonlik, akkor reducibilis. Ha az $n \times n$-es permutálómátrix sajátértékei kiadják az összes n-edik egységgyököt, akkor irreducibilis, egyébként reducibilis.

10.3. Legyen '$\leftrightarrow$' az a reláció az **A** mátrix G gráfjának csúcsain, mellyel $i \leftrightarrow j$, ha i-ből vezet irányított út j-be és vissza. Világos, hogy e reláció ekvivalenciareláció, így megad a G gráf csúcsain egy osztályozást. Világos, hogy bármely két osztály között legfeljebb csak egy irányba mehet él, ha ugyanis mindkét irányba menne, akkor egyetlen osztállyá olvasztaná azokat. Így egy újabb gráfot konstruálhatunk, melynek csúcsai az osztályok, két csúcs között meg irányított él, ha a megfelelő osztályok között fut él. Világos az is, hogy e gráf körmentes, ui. egy kör egyetlen osztállyá tenné a benne szereplő osztályokat. Egy körmentes gráf (erdő) csúcsai sorszámozhatók úgy, hogy minden osztályból csak nagyobb indexűbe vezessen él. Legyen tehát G_1, G_2,…, G_k a G erősen összefüggő osztályainak olyan indexelése, hogy ha G_i-ből vezet él G_j-be, akkor $j > i$. A G csúcsait ezek után úgy indexeljük át, hogy az indexek kiosztását G_1-gyel kezdjük (azon belül tetszőlegesen), G_2-vel folytatjuk,…. Az átindexeléssel kapott gráf a $\mathbf{PAP}^\mathsf{T}$ mátrix gráfja lesz, ahol **P** a csúcsok átindexelésének megfelelő permutáló mátrix. $\mathbf{PAP}^\mathsf{T}$ a feladatban megadott blokkfelsőháromszög-mátrix alakú.

10.4. A feladatban megadott mátrix és gráfja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$



Megmutatjuk, hogy 1-ből az 1-be nem lehet pontosan $(n-1)^2$ lépésben eljutni, de bármely két pont között vezet épp $(n-1)^2+1 = n^2-2n+2$ hosszú irányított út. Az $1 \to 1$ út legalább egy n és néhány $n-1$ hosszú körből állhat, de $x(n-1)+yn = (n-1)^2$, azaz $(x+y)(n-1)+y = (n-1)^2$ nem oldható meg $0 \leqslant x < n$, $1 \leqslant y < n-1$ egészekkel, másrészt $x(n-1)+yn = (n-1)^2+1$ megoldható: $x = n-2$, $y = 1$.

Ha $i \neq 1$, $j \neq 1$, akkor i-ből j-be vezet k hosszú út, ahol $0 \leqslant k < n$. Épp $(n-1)^2+1$ lépésben úgy juthatunk el i-ből j-be, ha először megtesszük a k hosszú utat, majd $(n-1)^2+1-k$ lépésben eljutunk j-ből j-be. Ez álljon x számú $n-1$ hosszú és y számú n hosszú körútból. Felírva az utak összhosszát majd átrendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} k + x(n-1) + yn &= (n-1)^2 + 1 \\ (x+y)(n-1) + y + k - 1 &= (n-1)^2. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $k = 0$ esetén $y = 1$, $x = n-2$, $k = 1$ esetén $x = n-1$, $y = 0$. $k > 2$ esetén az $y+k-1 = n-1$ és az $x+y = n-2$ egyenlőségekből $y = n-k$, és $x = n-2-y = k-1$.

Végül az $1 \to j$ út megkapható, ha az $n \to j$ utat megkonstruáljuk, és a kezdő lépést nem n-ből, hanem 1-ből indítjuk. Az $i \to 1$ út az $i \to 2$ útból hasonlóan konstruálható meg.

10.5. Sajátértékek: 10, 3, 3, a 10-hez tartozó jobb sajátvektor: $\mathbf{u} = (5,9,11)$, bal sajátvektor: $\mathbf{v} = (4,2,1)$, a két Perron-vektor: $\mathbf{p} = \frac{1}{25}(5,9,11)$, $\mathbf{q} = \frac{1}{7}(4,2,1)$.

10.6. A határértéket az $\mathbf{u} = (5,9,11)$ és $\mathbf{v} = (4,2,1)$ jobb és bal sajátvektorokkal is számolhatjuk $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ helyett, mivel az 1-normáikkal egyszerűsíthetünk:

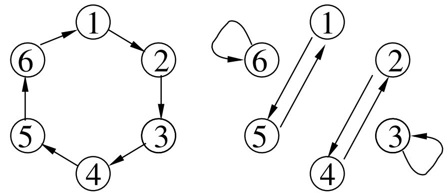
$$\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u}} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 20 & 10 & 5 \\ 36 & 18 & 9 \\ 44 & 22 & 11 \end{bmatrix}.$$

10.7. Mivel a $\min\{5/4, 6/6, 7/5\} = 1$, ezért a Collatz–Wielandt-tétel szerint spektrálsugara is legalább ennyi. (Vagy a tételbeli másik képlettel: mivel a $c(4,6,5) \leqslant \mathbf{A} \cdot (4,6,5) = (5,6,7)$ egyenlőtlenségben c lehetséges maximuma 1, ezért a spektrálsugár legalább 1.)

10.8. Mivel $\mathbf{D}^{-1} = \operatorname{diag}(1/x_1, \dots, 1/x_n)$, ezért követve az ötletben leírtakat, a 10.16. tétel első képlete a feladat első képletét adja. A $\mathbf{DAD}^{-1}$ mátrixból a második képletet kapjuk.

10.9. A 10.8. feladat első képlete az első, a második képlete a második mátrixról azt adja, hogy a minimum és a maximum is 10, így a spektrálsugár 10, tehát 10 a domináns sajátérték mindkét esetben, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó sajátvektor – az első esetben a jobb, a másodikban a bal. (Gondoljuk meg!)

10.10. Az irreducibilitás eldönthető a mátrixokhoz rendelt szomszédsági gráfokkal:



$\mathbf{R}_1$ irreducibilis, mert a gráf erősen összefüggő, azaz bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni irányított úton. $\mathbf{R}_2$ reducibilis, hisz például nem indul irányított él a következő halmazokból a komplementerükbe: $\{6\}$, $\{3\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,4\}, \dots$. Így igen sok olyan $\mathbf{P}$ permutáló mátrix van, amelyik $\mathbf{R}_2$-t a kívánt alakba viszi. Közülük legegyszerűbb az identikus mátrix, hisz $\mathbf{R}_2$ már a kívánt alakú:

$$\mathbf{I}\mathbf{R}_2\mathbf{I}^\mathsf{T} = \mathbf{R}_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

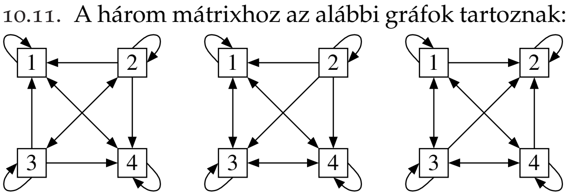
Az $\mathbf{R}_1$ mátrixnak nyilvánvalóan jobb és bal sajátvektora az 1 sajátértékkel az $\mathbf{1}$ vektor, így $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \frac{1}{6}(1,1,1,1,1,1)$. Mivel $\mathbf{R}_1$ nemnegatív és irreducibilis, ezért a Frobenius–Perron-tétel szerint a spektrálsugárhoz, mint sajátértékhez tartozó sajátvektor az egyetlen sajátvektor, mely pozitív elemű. Ebből következik, hogy a spektrálsugár 1.

Másik megoldás a feladat második részére:

$$\det(\mathbf{R}_1 - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 - 1.$$

A karakterisztikus polinom gyökei a hatodik egységgyökök, melyek az 1-sugarú körön vannak, tehát 1 a spektrálsugár. A spektrálsugár valóban sajátérték, és a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{u} = (1,1,1,1,1,1)$.

10.11. A három mátrixhoz az alábbi gráfok tartoznak:



Ennek alapján az első gráfban az $\{1,4\}$, a másodikban az $\{1,3,4\}$, a harmadikban a $\{2\}$ halmazból nem érhető el a többi pont. A pontoknak egy olyan átsorszámozását keressük, melyben e pontok a többi után következnek, ui. általában, ha az

$$\{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n\}$$

halmazban az első k pontba nem fut él a $\{k+1, \dots, n\}$ csúcshalmazból, akkor a szomszédsági mátrix $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{smallmatrix}\right]$

alakú lesz. Az első gráfban például a 3-2-1-4 sorrend jó, hisz az $\{1,4\}$ halmaz elemei vannak hátul, amit a $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&1&1&1\\\hline 0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right].$$

A második esetben például jó a 2-1-3-4 sorrend, hisz az $\{1,3,4\}$ halmaz elemei vannak hátul, amit a $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|ccc}1&1&1&1\\\hline 0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right].$$

Végül a harmadik mátrixnál jó az 1-4-3-2 sorrend, így a 2 elem van hátul, amit az $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right].$$

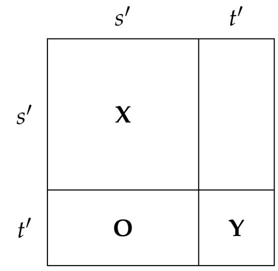
A példabeli permutáló mátrixok mindegyike szimmetrikus, így $\mathbf{P}=\mathbf{P}^\mathsf{T}$. A balról szorzó permutáló mátrix az egységmátrixból a megadott permutáció sorokra való alkalmazásával, míg a jobbról szorzó mátrix az oszlopokra való alkalmazásával határozható meg, de elég csak az egyiket megadni, a másik a transzponáltja.

10.12. Először belátjuk, hogy ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix részmátrixai közt van olyan $s\times t$ méretű zérusmátrix (s sor és t oszlop metszetében), hogy $s+t=n+1$, akkor minden kígyóban van 0. Az alábbi ábra szemléltetésül az $n=5, s=t=3, 3+3=5+1$ esetet mutatja a bal alsó sarokbeli zérus részmátrixszal:

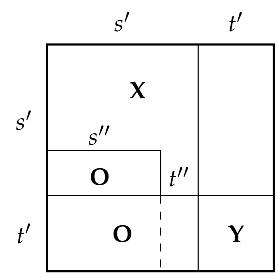
$$\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{ccc|cc}*&*&*&?&?\\ *&*&*&?&?\\\hline 0&0&0&*&*\\0&0&0&*&*\\0&0&0&*&*\end{array}\right]\\
 & \mathrm{t}
\end{array}
\quad\text{s}$$

Tegyük fel, hogy van egy kígyó, mely nem metsz bele ebbe az $s\times t$-es részmátrixba. A kígyó elemei legyenek 1-esek, minden más elem 0. Ekkor a kijelölt t oszlopban t egyes, a kijelölt s sorban s egyes van, ezek száma így $n+1$, ami ellentmondás, hisz egy kígyónak n eleme van.

Fordítva: teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ minden kígyójának van nulleleme, akkor $\mathbf{A}$ részmátrixai közt van olyan $s\times t$ méretű zérusmátrix, melyre $s+t=n+1$. Az 1×1-es mátrixokra az állítás teljesül. Tegyük fel, hogy minden $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixra is igaz. Válasszuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix egy nem $a_{ij}\neq 0$ elemét (ha ilyen nincs, kész vagyunk). Ha az i-edik sort és a j-edik oszlopot elhagyjuk, olyan $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixot kapunk, melynek minden kígyójában van zérus, hisz ezek az a_{ij}-vel kígyók az $\mathbf{A}$-ban. Az indukciós feltevés szerint e részmátrixnak van $s'\times t'$ méretű zérus részmátrixa, melyre $s'+t'=n$. A sorok és oszlopok permutációjával hozzuk az $\mathbf{A}$ mátrixot olyan alakra, hogy e részmátrix a bal alsó blokkban legyen. Ekkor tehát a mátrix alakja



Az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ négyzetes mátrixok, és $\mathbf{X}$ bármely kígyója kiegészítve $\mathbf{Y}$ bármely kígyójával és a_{ij}-vel az $\mathbf{A}$ egy kígyóját adja, melyben van zérus. Ha $\mathbf{Y}$-ban van olyan kígyó, melyben nincs 0, akkor $\mathbf{X}$ minden kígyójában van, és fordítva, így feltehető, hogy $\mathbf{X}$ minden kígyójában van 0. Ekkor $\mathbf{X}$-ben van olyan $s''\times t''$ méretű nullmátrix, melyre $s''+t''=s'+1$. E mátrixot a sorok és oszlopok permutációjával $\mathbf{X}$ bal alsó sarkába rendezve a következő elrendezést kapjuk:



Így egy olyan $s''\times(t'+t'')$ méretű zérusmátrixot kapunk, melyre $s''+t'+t''=s'+1+t'=n+1$, azaz az $s=s''$, $t=t'+t''$ választás a bizonyítandó méretű nullmátrix létezését igazolja.

10.13. Több megoldás is lehetséges. Ezek egyike:

$$\begin{bmatrix}.3&.4&.3\\.2&.5&.3\\.5&.1&.4\end{bmatrix}=.3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+.3\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$
$$+.2\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}+.1\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}+.1\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

10.14. Legyen $\mathbf{A}$ duplán sztochasztikus. Ha $\mathbf{A}$ permutáló mátrix, akkor kész vagyunk, tegyük tehát fel, hogy $\mathbf{A}$ nem permutáló mátrix. Ekkor van olyan $a_{i_1j_1}$ eleme, melyre $0<a_{i_1j_1}<1$. Ekkor az i_1-dik sorban van (legalább) egy olyan $a_{i_1j_2}$ elem, melyre $0<a_{i_1j_2}<1$. Ekkor a j_2-dik oszlopban van olyan $a_{i_2j_2}$ elem, melyre $0<a_{i_2j_2}<1$. Folytatjuk ezt az eljárást úgy, hogy amikor új sort vagy oszlopot választunk az olyan legyen, amelyikben még nem jártunk. Ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, mert egyszer egy olyan helyzetbe jutunk, melyben olyan sor vagy oszlop maradt, melyben jártunk. Például az a_{i_k,j_k} elem után csak olyan $0 < a_{i_kj_t} < 1$ elem maradt, hogy a j_t oszlopban már jártunk, vagy az a_{i_{k-1},j_k} elem után csak olyan $0 < a_{i_tj_k} < 1$ elem maradt, hogy az i_t sorban már jártunk. Ekkor találtunk egy olyan K kört a mátrixban, melynek csúcsaiban 0 és 1 közé eső számok vannak. Indexeljük át e kör csúcsait úgy, hogy a K-ban lévő elemek közül a legkisebb kapja az i_1j_1 indexet, így

$$K = \{a_{i_1j_1}, a_{i_1j_2}, a_{i_2j_2}, \dots, a_{i_kj_k}, a_{i_kj_1}\},$$

és $a_{i_1j_1} = \min\{a_{ij} \in K\}$. Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$-val azonos rendű mátrix, melyben minden $b_{ij} = 0$ kivéve a K csúcsaival azonos indexű elemeket, ahol legyen $b_{i_tj_t} = 1$, $b_{i_tj_{t+1}} = -1$, $(t = 1, 2, \dots, k-1)$ és $b_{i_k,j_1} = -1$. Az $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - a_{i_1j_1}\mathbf{B}$ mátrix szintén duplán sztochasztikus, legalább eggyel több 0-eleme van mint $\mathbf{A}$-nak, és amelyik pozícióban egy elem $\mathbf{A}_1$-ben pozitív, ott $\mathbf{A}$-ban is pozitív elem van. Ha $\mathbf{A}_1$ permutáló mátrix, kész vagyunk, az 1-eseknek megfelelő helyen $\mathbf{A}$-ban egy pozitív kígyó van, ha nem, folytatjuk az eljárást megkonstruálva az $\mathbf{A}_2, \dots$ mátrixokat. Az eljárás véges lépésben egy pozitív kígyót ad.

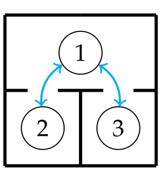
A konkrét $\mathbf{A}$ mátrixban például a következő mátrixsorozat talál pozitív kígyót:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .3 & 0 & .4 & .3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .7 \\ .7 & 0 & .3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\min a_{ij} = .3)$$

$$\to \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .6 & .4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\min a_{ij} = .4)$$

$$\to \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.15. *a)* A labirintus alaprajzára könnyen odaképzelhetjük a gráfot, és mindjárt leolvashatjuk róla az áttérés mátrixát:



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

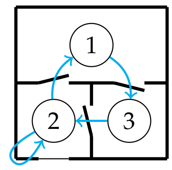
A periódus 2, $\mathbf{P}$ irreducibilis, de nem primitív, két sajátérték van a spektrálkörön: 1 és -1. A Markov-lánc állapotai egyetlen visszatérő osztályba tartoznak. Az 1-hez tartozó bal Perron-vektor a stacionárius vektor: $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Mivel

$$\mathbf{P}^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{2n+1} = \mathbf{P},$$

ezért $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n} = \mathbf{P}^2$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n+1} = \mathbf{P}$ és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}^{2n} + \mathbf{P}^{2n+1}}{2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) A másik labirintusra:



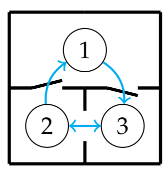
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A gráf erősen összefüggő, és mátrixának főátlójában van nemzérus elem, így $\mathbf{P}$ primitív, aperiodikus, azaz periódusa 1, a spektrálkörön csak az 1 sajátérték van (a továbbiak $-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$). A Markov-lánc állapotai egyetlen visszatérő osztályba tartoznak. Az 1-hez tartozó bal Perron-vektor, azaz a stacionárius vektor $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Így

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a Markov-folyamat – vagy másként fogalmazva a robotegér – várhatóan az idő felében a 2-es állapotban – szobában – van, a negyedében az 1-esben és negyedében a 3-asban.

10.16. *a)*

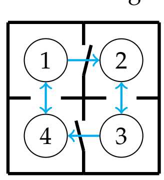


$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A periódus 1, mivel a gráfban van 2 és 3 hosszú kör is és ezek legnagyobb közös osztója 1. $\mathbf{P}$ irreducibilis és így primitív. A Markov-lánc állapotai egyetlen visszatérő osztályba tartoznak. Az 1-hez tartozó bal Perron-vektor a stacionárius vektor: $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, így

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) A Markov-lánc gráfja és átmenetmátrixa



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A gráfban van 2 és 4 hosszú kör, így periódusa 2. Így a spektrálkörön lévő sajátértékek az 1 és a -1. További sajátérték kétszeres multiplicitással a 0.

$\mathbf{P}$ irreducibilis, de nem primitív. A Markov-lánc állapotai egyetlen visszatérő osztályba tartoznak. Az 1-hez tartozó bal Perron-vektor a stacionárius vektor: $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Mivel $n > 0$ esetén

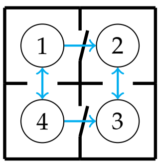
$$\mathbf{P}^{2n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

ezért $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n} = \mathbf{P}^2$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n+1} = \mathbf{P}^3$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}^{2n} + \mathbf{P}^{2n+1}}{2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A robotegér tehát várhatóan ideje negyedét tölti mindegyik szobában.

10.17. *a)* A gráf és az átmenetmátrix



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

A periódus 2. A sajátértékek a spektrálkörön 1 és -1. A $\mathbf{P}$ reducibilis, hisz a $\{2,3\}$-ból nem lehet az $\{1,4\}$-be jutni. Az utóbbi halmaz átmeneti, az előbbi visszatérő osztály. A csúcsok átsorszámozása után kapott gráf mátrixa, azaz a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

mátrixszorzat is igazolja a reducibilitást. Jelölje e mátrixot $\mathbf{B}$. Erről a sajátértékek is leolvashatók egyszerű fejszámolással: ± 1 és $\pm\frac{1}{2}$. Egyúttal az is látható, hogy a G gráfon a $\{2,3\}$ osztály bázisosztály, más bázisosztály nincs, így az aszimptotikus tulajdonságokat is ez határozza meg. A $\mathbf{P}$ mátrix 1 sajátértékhez tartozó bal Perron-vektora, azaz a stacionárius vektor $\boldsymbol{\pi} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. A hatványokat valamivel egyszerűbb $\mathbf{P}$ helyett a $\mathbf{B}$-vel számolni egyszerű indukcióval:

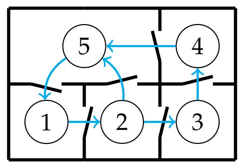
$$\mathbf{B}^{2n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2^{2n}} & 0 & 1-\frac{1}{2^{2n}} \\ \frac{1}{2^{2n}} & 0 & 1-\frac{1}{2^{2n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{2n+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{2n+1}} & 0 & 1-\frac{1}{2^{2n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{2n+1}} & 0 & 1-\frac{1}{2^{2n+1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{2n} + \mathbf{B}^{2n+1})$ és a sorok és oszlopok permutációjával a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\mathbf{P}^{2n} + \mathbf{P}^{2n+1})$ határérték is leolvasható. Ezt persze a stacionárius vektorból is tudtuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}^{2n} + \mathbf{P}^{2n+1}}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A Markov-lánc gráfja és átmenetmátrixa

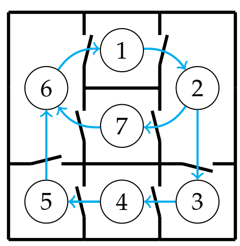


$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A gráf erősen összefüggő, van benne egy 3 és egy 5 hosszú kör, így a periódus $\text{lnko}(3,5) = 1$, tehát a $\mathbf{P}$ primitív, a spektrálkörén csak az 1 az egyetlen sajátérték. A hozzá tartozó bal Perron-vektor, azaz a stacionárius vektor $\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{8}(2,2,1,1,2)$. A Markov-lánc állapotai egyetlen visszatérő osztályba tartoznak.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.18. A Markov-lánc gráfja és átmenetmátrixa



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A gráf erősen összefüggő, van benne 4 és 6 hosszú irányított kör, de páratlan hosszú nincs, így a periódus $\text{lnko}(4,6) = 2$. A Markov-lánc állapotai egyetlen visszatérő osztályba tartoznak. A stacionárius eloszlás, azaz az 1-hez tartozó bal Perron-vektor $\frac{1}{10}(2,2,1,1,1,2,1)$, így a $\mathbf{P}^n$ hatványok átlagának határértéke

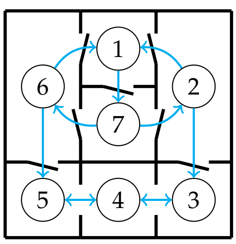
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \frac{\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}^\mathsf{T}}{\boldsymbol{\pi}^\mathsf{T}\mathbf{1}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{P}^{2n}$ esetén e mátrix elemeire $p_{ij}^{(2n)} = 0$, ha $i+j$ páratlan, míg $\mathbf{P}^{2n+1}$ esetén $p_{ij}^{(2n+1)} = 0$, ha $i+j$ páros, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n+1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.19. A Markov-lánc gráfja és átmenetmátrixa



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

A gráf nem erősen összefüggő, így a $\mathbf{P}$ mátrix reducibilis. Az egyetlen bázisosztály $\{3, 4, 5\}$, periódusa 2, így a $\mathbf{P}$ mátrixé is 2. Az $\{1, 2, 6, 7\}$ átmeneti osztály, periódusa 3. Az egyetlen bázisosztály nem primitív, az 1 és a -1 sajátértékek vannak a spektrálkörön. A stacionárius vektor $\boldsymbol{\pi} = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0)$, ami kifejezi, hogy a Markov-lánc aszimptotikusan az idő hányad részében melyik állapotban van, egyúttal ez megadja a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}^{2n} + \mathbf{P}^{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^k\right)$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

határértékeket. A páros és a páratlan hatványok határértékének meghatározása több számolást igényel, ami számítógéppel is segíthető:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{2n+1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.20. A bizonyítást $N = 2$ esetre mutatjuk meg, de nagyobb N esetén is hasonlóan működik. Az átmenetmátrix legyen $\mathbf{P}$, és keressük az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{P} = \mathbf{x}^\mathsf{T}$ megoldását, azaz az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektort. A $\mathbf{P}$ mátrix és a $(\mathbf{P}^\mathsf{T} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer alakja

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\begin{aligned} (p_{11} - 1)x_1 + {} & p_{21}x_2 & &= 0, \\ p_{12}x_1 + {} & (p_{22} - 1)x_2 + {} & p_{32}x_3 &= 0, \\ & p_{23}x_2 + {} & (p_{33} - 1)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{P}$ sztochasztikus, azaz sorvektorainak összege 1, ezért a következő átalakítások adódnak az együtthatómátrixon:

$$\begin{bmatrix} p_{11} - 1 & p_{21} & 0 \\ p_{12} & p_{22} - 1 & p_{32} \\ 0 & p_{23} & p_{33} - 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -p_{12} & p_{21} & 0 \\ p_{12} & -p_{21} - p_{23} & p_{32} \\ 0 & p_{23} & -p_{32} \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -p_{12} & p_{21} & 0 \\ 0 & p_{23} & -p_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Így valóban $x_1 p_{12} = x_2 p_{21}$ és $x_2 p_{23} = x_3 p_{32}$. Egy tetszőleges $\mathbf{0}$-tól különböző $\mathbf{x}$ megoldást 1-normájával osztva megkapjuk a $\boldsymbol{\pi}$ vektort.

10.21. A 10.20. feladat alapján olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $x_n p_{n,n+1} = x_{n+1} p_{n+1,n}$. Legyen $x_0 = 1$. Ekkor $x_1 p_{10} = x_0 p_{01}$, azaz $x_1 \cdot \frac{1}{4} = x_0 \cdot 1$, amiből $x_1 = 4$. Hasonlóan folytatva, majd a végén az $\mathbf{x}$ vektor 1-normájával osztva kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_1} = \frac{1}{37}(1, 4, 8, 16, 8).$$

10.22. *a)* $(4/15, 2/5, 1/5, 1/10, 1/30) = \frac{1}{30}(8, 12, 6, 3, 1)$, *b)* $(1/4, 3/8, 3/16, 3/32, \ldots, 3/2^k, \ldots)$.