3.1. A két táblázat szorzata:

	csarnok	hipermarket	piac
Anti	1350	1250	1210
Bori	1425	1245	1225
Cili	960	830	850

Tehát Antinak és Borinak a piacon, Cilinek a hipermarketben érdemes vásárolnia.

Aki e felírás részletszámításaiban még bizonytalan, írja fel úgy a táblázatokat, hogy az kövesse a fejlécek pozícióját (rövidítések: A = Anti, B = Bori, C = Cili, a = alma, b = banán, c = citrom, csrn = csarnok, hipm = hipermarket):

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\ \hline
A & 2 & 2 & 1 \\
B & 3 & 2 & 0.5 \\
C & 2 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & \text{csrn} & \text{hipm} & \text{piac} \\ \hline
a & 180 & 100 & 130 \\
b & 390 & 420 & 360 \\
c & 210 & 210 & 230 \\ \hline
 & \text{csrn} & \text{hipm} & \text{piac} \\ \hline
A & 1350 & 1250 & 1210 \\
B & 1425 & 1245 & 1225 \\
C & 960 & 830 & 850
\end{array}
$$

3.2. *a)* A két helyettesítést elvégezve:

$$
\begin{aligned}
x &= 2a + b = 2(-3s+t) + (4s-t) = -2s + t, \\
y &= 3a + b = 3(-3s+t) + (4s-t) = -5s + 2t.
\end{aligned}
$$

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával is megkapható:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & a & b \\ \hline
x & 2 & 1 \\
y & 3 & 1
\end{array}
\times
\begin{array}{c|cc}
 & s & t \\ \hline
a & -3 & 1 \\
b & 4 & -1
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc}
 & s & t \\ \hline
x & -2 & 1 \\
y & -5 & 2
\end{array}
$$

Aki e felírás részletszámításaiban még bizonytalan, írja fel úgy a táblázatokat, hogy az kövesse a fejlécek pozícióját:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & a & b \\ \hline
x & 2 & 1 \\
y & 3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & s & t \\ \hline
a & -3 & 1 \\
b & 4 & -1 \\ \hline
 & s & t \\ \hline
x & -2 & 1 \\
y & -5 & 2
\end{array}
$$

Tehát a függvény $f(x,y) = f(-2s+t, -5s+2t)$.

b) A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával is megkapható. E szorzatból az olvasható le, hogy a kompozícióval kapott helyettesítés: $x = s$, $y = t$, $z = u$. Ez azt jelenti, hogy a két helyettesítés valamilyen értelemben egymás inverze (mit is jelenthet ez pontosan?).

3.3. Kétféleképp adhatjuk meg a táblázatot, ha az első sor és oszlop a tv3-é:

$$
\begin{array}{c|cc}
\textit{-re} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/4 \\
tv4 & 1/2 & 3/4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
\textit{-ről} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/2 \\
tv4 & 1/4 & 3/4
\end{array}
$$

A nézők kezdeti eloszlásának táblázatára is két lehetőség van:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \textit{arány} \\ \hline
tv3 & 1/2 \\
tv4 & 1/2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & tv3 & tv4 \\ \hline
\textit{arány} & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

a) Először válaszoljuk meg a kérdést a tv3-ra: a saját nézőinek fele marad ($\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$), ehhez jön a tv4 nézőinek negyede ($\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$), ez összesen $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$. A tv4-re a számítás: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$. Ez táblázatok szorzásával az előző két-két felírást használva:

$$
\begin{array}{c|cc}
\textit{-re} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/4 \\
tv4 & 1/2 & 3/4
\end{array}
\times
\begin{array}{c|c}
 & \textit{arány} \\ \hline
tv3 & 1/2 \\
tv4 & 1/2
\end{array}
=
\begin{array}{c|c}
 & \textit{arány} \\ \hline
tv3 & 3/8 \\
tv4 & 5/8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & tv3 & tv4 \\ \hline
\textit{arány} & 1/2 & 1/2
\end{array}
\times
\begin{array}{c|cc}
\textit{-ről} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/2 \\
tv4 & 1/4 & 3/4
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc}
 & tv3 & tv4 \\ \hline
\textit{arány} & 3/8 & 5/8
\end{array}
$$

Csak az átpártolás táblázatát nézve, a második hét végére a tv3 nézői első héten megmaradt felének csak a fele marad meg, míg a tv4-től átpártolt negyednyi közönségnek is a fele, tehát a tv3 $\to$ tv3 „mozgás” a nézők 3/8-adát érinti, mert $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$. Hasonló számításokkal a többi érték is megkapható, melyet az alábbi, két, táblázatok közti szorzással is meg lehet adni:

$$
\begin{array}{c|cc}
\textit{-re} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/4 \\
tv4 & 1/2 & 3/4
\end{array}
\times
\begin{array}{c|cc}
\textit{-re} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/4 \\
tv4 & 1/2 & 3/4
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc}
\textit{-re} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 3/8 & 5/16 \\
tv4 & 5/8 & 11/16
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
\textit{-ről} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/2 \\
tv4 & 1/4 & 3/4
\end{array}
\times
\begin{array}{c|cc}
\textit{-ről} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 1/2 & 1/2 \\
tv4 & 1/4 & 3/4
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc}
\textit{-ről} & tv3 & tv4 \\ \hline
tv3 & 3/8 & 5/8 \\
tv4 & 5/16 & 11/16
\end{array}
$$

3.4. *a)* $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, *b)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$ nincs értelmezve. *c)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.5. A férfiarc (Humphrey Bogart) mátrixán a 9-es szám jelzi az átlátszóságot, míg a szürke színárnyalatait a 0-tól 8-ig terjedő számok.

Ha a a $[0,k]$ intervallumba eső szám, akkor $0 \le a/k \le 1$, így a/k egész része 0 vagy 1. Ha k az átlátszó pixel színe (az adott mátrixban $k = 9$), akkor $\lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 1, ha $a = k$, azaz ha a pixel átlátszó, egyébként 0. Legyen egy pixel értéke az ábrán a, a háttérben az azonos helyen lévő pixel értéke b. Eszerint

$$
a \circledcirc b = a + \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor (b - a) = \begin{cases} b, & \text{ha } a = k, \\ a, & \text{egyébként} \end{cases}
$$

értéke pontosan ott mutatja a hátteret, ahol a kép átlátszó, azaz pont ott b, ahol $a = k$. Így e művelettel elemenként definiált $[\mathbf{A} \circledcirc \mathbf{B}]_{ij} = a_{ij} \circledcirc b_{ij}$ művelet a kívánt eredményt adja. A 3.2. ábrán három képet

32×24-es mátrixszal szemléltetünk, a férfiarc mátrixát is megadtuk, a másik a háttér. A művelet eredménye a harmadik kép.

3.6. Például a standard bázisba azon mátrixok tartoznak, amelyekben egyetlen elem 1, a többi 0.

3.7. E mátrixok összes lineáris kombinációja

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix}$$

alakú. Ha egy tetszőleges $\left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ mátrixról el akarjuk dönteni, hogy a fenti alakú-e, azaz fönnáll-e valamely a, b, c ismeretlenekre az

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

egyenlőség, akkor meg kell oldani a mátrixok elemeire vonatkozó négy egyenletből álló 3 ismeretlenes

$$\begin{aligned} a+b+c &= u \\ a + c &= v \\ a &= w \\ b+c &= z \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ha ennek van megoldása, akkor létezik a megfelelő lineáris kombináció, tehát az adott $\left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ mátrix a kifeszített térbe esik. Ennek az egyenletrendszernek a bővített mátrixát fölírva, majd elemi sorműveletekkel megoldva a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u \\ 1 & 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & u-w \\ 0 & 0 & 1 & v-w \\ 0 & 0 & 0 & w+z-u \end{array}\right].$$

Így ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $w + z - u = 0$. Például az $\left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ebbe az altérbe esik. A fenti egyenletrendszer megoldásával az is megkapható, hogy mik a lineáris kombináció együtthatói. Azt kapjuk, hogy $a = 3$, $b = 1$ és $c = 1$.

3.8. *a)* Hamis, *b)* igaz, *c)* igaz.

3.9. *a)* $\begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$, *c)* -3 (vagy $[-3]$), *d)* $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$, *e)* $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$, *f)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ui. $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$.

3.10. Igaz, hamis, igaz, hamis. Az egyenlőségek akkor igazak, ha a képletben szereplő két mátrix felcserélhető.

3.11.

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2,$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 5,$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) A skaláris szorzat nem végezhető el, a diadikus szorzat

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.12. *a)* $\mathbf{AB}$ nincs értelmezve. *b)* $\mathbf{AB}^\mathsf{T} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, *d)* $\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

e) $(\mathbf{DA})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 32 & 23 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$.

3.13. A méretek alapján a $\mathbf{BC}$ szorzat nincs értelmezve, a többi:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{CD} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{DE} = \mathbf{ED} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, mert különböző típusúak, $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$, mert az egyik oldal nincs értelmezve, $\mathbf{CD} \neq \mathbf{DC}$, bár mindkét oldal értelmezve van és azonos típusú. Ugyanakkor fennáll a $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőség. Azaz vannak felcserélhető mátrixok, de a mátrixszorzás nem felcserélhető művelet, tehát nem kommutatív!

3.14. *a)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5$, *d)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$.

3.15. *a)* $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

3.16. A lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

azaz kifejtve

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

3.17. *a)* Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\mathbf{v}_{\mathcal{C}} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.18. *a)* $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *b)* $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.19. *a)* $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} a \\ 2d-2b \\ 3a+c \\ d \end{bmatrix}$.

3.20. *a)* Jelölje $\mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_{ij}(c)$, $\mathbf{E}_i(c)$ rendre azt az elemi mátrixot, melyet a következő sorműveletekkel kaptunk az egységmátrixból:

$$\mathbf{I} \xrightarrow{S_i \leftrightarrow S_j} \mathbf{E}_{ij}, \ \mathbf{I} \xrightarrow{S_i + cS_j} \mathbf{E}_{ij}(c), \ \mathbf{I} \xrightarrow{cS_i} \mathbf{E}_i(c).$$

Ekkor

$$\mathbf{I} \xrightarrow{O_i \leftrightarrow O_j} \mathbf{E}_{ij}, \ \mathbf{I} \xrightarrow{O_j + cO_i} \mathbf{E}_{ij}(c), \ \mathbf{I} \xrightarrow{cO_i} \mathbf{E}_i(c).$$

b) Egyenként ellenőrizhető (a hozzáadás műveleténél óvatosnak kell lennünk):

$$\mathbf{A} \xrightarrow{O_i \leftrightarrow O_j} \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}, \ \mathbf{A} \xrightarrow{O_j + cO_i} \mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}(c), \ \mathbf{A} \xrightarrow{cO_i} \mathbf{A}\mathbf{E}_i(c).$$

3.21. Számoljunk blokkmátrixként kezelve a mátrixokat:

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] + 3\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & 3 + 3\cdot 1 & 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel! Ezután tekintsük a blokkmátrixok szorzását!

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 6 & 6 \end{array}\right]$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha ellenőrzésül egyszerű mátrixszorzással is elvégezzük a műveletet!

3.22. *a)* $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$, *b)* $\left[\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ \hline 12 & 12 \end{array}\right]$, *c)* A két mátrix szorzata

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy a 3.7. állítás feltétele (minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával) valóban szükséges, de elégséges is.

3.23. 1. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$-re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható a feladatban megadott alakban, a Gauss–Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{B}_r\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{S}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{d}_r\\ \mathbf{0}_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}_s\end{bmatrix}\mathbf{t}_s\right)\\ &= \mathbf{B}_r\left(\mathbf{d}_r - \mathbf{S}\mathbf{t}_s + \mathbf{S}\mathbf{t}_s\right) = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r\\ &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítás első felét.

2. Az, hogy $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}_s\end{smallmatrix}\right]\mathbf{t}_s$ a homogén egyenletrendszer megoldása, az előzőhöz hasonlóan látható. Az, hogy $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}_s\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják abból következik, hogy egyrészt kifeszítik a nullteret, másrészt lineárisan függetlenek, hisz az alsó blokkban lévő $\mathbf{I}_s$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.

3.24. *a)* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} = \mathbf{A}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}$, ui. az ij-edik blokk a bal oldalon $(a_{ij}+b_{ij})\mathbf{C}$, a jobb oldalon $a_{ij}\mathbf{C}+b_{ij}\mathbf{C}$, és ez az egyenlőség minden ij indexre fennáll. A másik azonosság hasonlóan igazolható.

b) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})\otimes\mathbf{D} = \mathbf{A}\otimes(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$, ahol a mátrixok mérete $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{C}_{p\times q}$, $\mathbf{D}_{r\times s}$. Az $\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}$ szorzatban $a_{MN}c_{PQ}$ az $((M-1)p+P,(N-1)q+Q)$ indexű elem ($1\leqslant M\leqslant m$, $1\leqslant N\leqslant n$, $1\leqslant P\leqslant p$, $1\leqslant Q\leqslant q$, $1\leqslant R\leqslant r$, $1\leqslant S\leqslant s$). Így az $(a_{MN}c_{PQ})d_{RS}$ az $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})\otimes\mathbf{D}$ szorzatban az

$$(((M-1)p+P-1)r+R,((N-1)q+Q-1)s+S)$$

indexű elem. Hasonlóképp $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$-ben a $c_{PQ}d_{RS}$ szorzat a $((P-1)r+R,(Q-1)s+S)$ indexű elem, így az $a_{MN}(c_{PQ}d_{RS})$ indexe az $\mathbf{A}\otimes(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$ szorzatban

$$\begin{aligned}&((M-1)pr+(P-1)r+R,((N-1)qs+(Q-1)s+S) =\\ &(((M-1)p+P-1)r+R,((N-1)q+Q-1)s+S).\end{aligned}$$

Tehát az $a_{MN}c_{PQ}d_{RS}$ elem indexe a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalán azonos, ami igazolja, hogy $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})\otimes\mathbf{D} = \mathbf{A}\otimes(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$.

c) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\otimes\mathbf{C}^\mathsf{T}$, ugyanis

$$\begin{bmatrix}a_{11}\mathbf{C} & \dots & a_{1n}\mathbf{C}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}\mathbf{C} & \dots & a_{mn}\mathbf{C}\end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}a_{11}\mathbf{C}^\mathsf{T} & \dots & a_{m1}\mathbf{C}^\mathsf{T}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n}\mathbf{C}^\mathsf{T} & \dots & a_{mn}\mathbf{C}^\mathsf{T}\end{bmatrix}.$$

3.25. A 3.29. példában meghatároztuk a megadott mátrixegyenlettel a 3.28. tétel szerint ekvivalens

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbf{B}_i^\mathsf{T}\otimes\mathbf{A}_i\right)\operatorname{vec}(\mathbf{X}) = \operatorname{vec}(\mathbf{C})$$

egyenlet együtthatómátrixát:

$$\mathbf{I}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right].$$

Innen az $\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right],$$

ahonnan az első két sorból azonnal látszik, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens, tehát a Sylvester-egyenletnek sincs megoldása.

3.26. A megadott lineáris mátrixegyenlet egyértelműen megoldható. A 3.28. tétel szerinti egyenletrendszer bővített mátrixa és a megoldásvektor visszaírva a mátrixegyenlet megoldásává:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right], \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Az Octave-kód:

```
a1 = [1 1;0 1];
a2 = [0 1;1 0];
b1 = [1 1 1;0 1 1;0 0 1];
b2 = [0 0 1;0 2 0;3 0 0];
b = [5 2;4 6;5 4];
B = reshape(b,6,1)
A = kron(b1',a1) + kron(b2',a2)
A\B
```

3.27. Valóban

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

3.28. *1. megoldás:* Az i-edik klubhoz rendeljük a $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il})$ vektort, ahol

$$v_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik lakos tagja,} \\ 0, & \text{ha nem tagja az } i\text{-edik klubnak.} \end{cases}$$

E vektorok egészeleműek, így elemei a $\mathbf{Q}^l$ térnek, ahol l a lakosok száma. A feladat feltételei szerint

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} \text{páros}, & \text{ha } i \neq j, \\ \text{páratlan}, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy e vektorok lineárisan függetlenek. Indirekt módon tegyük fel, hogy lineárisan összefüggők, azaz hogy léteznek olyan $c_i \in \mathbb{Q}$ konstansok, hogy

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_l\mathbf{v}_l = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

Szorozzuk be e kifejezést a racionális c_i számok nevezőinek legkisebb közös többszörösével, majd osszuk el az így kapott egészek legnagyobb közös osztójával. Eszerint ha a vektorok lineárisan összefüggők, akkor olyan c_i egész számok is léteznek, melyekre a fenti egyenlőség fennáll, és amelyek relatív prímek. Ezután szorozzuk be skalárisan $(*)$ egyenlőséget a $\mathbf{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ vektorral. A bal oldalon páros számok és a $c_j \cdot$ páratlan szám összege áll, ami csak akkor lehet nulla, ha c_j páros. Ez minden j-re igaz, ami ellentmond annak, hogy a c_j számok relatív prímek. Tehát az indirekt feltevésünk hamis, azaz a vektorok lineárisan függetlenek. Akkor pedig e vektorok és így a klubok száma is legföljebb annyi lehet, mint a tér dimenziója, azaz l.

E megoldásban az együtthatók paritása játszotta a kulcsszerepet. Ez vezet a következő megoldás alapötletéhez, hogy a vektorok koordinátáit és az együtthatókat is a kételemű testből vegyük.

2. megoldás: Az i-edik klubhoz az előző megoldásban rendelt vektor egy 0-1-vektor, így tekinthető az $\mathbb{F}_2^l$ vektortér elemének is. Megmutatjuk, hogy a vektorok e térben is lineárisan függetlenek, így számuk kisebb vagy egyenlő, mint a tér dimenziója. A feladat feltételei szerint

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy a vektorok lineárisan összefüggők, azaz hogy léteznek olyan $c_i \in \mathbb{F}_2$ konstansok, hogy fennáll a $(*)$ egyenlőség, és nem mindegyik $c_j = 0$. Szorozzuk be mindkét oldalt skalárisan a $\mathbf{v}_j$ vektorral. Kapjuk, hogy $c_j = 0$. Ez minden $j = 1, 2, \ldots, l$ indexre fennáll, ami ellentmond az indirekt feltevésünknek, hogy nem mindegyik $c_j = 0$. Tehát a vektorok lineárisan függetlenek, így $k \leqslant l$.

Az 1. és 2. megoldásról megjegyezzük, hogy az utóbbi egy erősebb állítást tartalmaz. Megmutatható ugyanis, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 0-1-vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_p$ fölött, akkor függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött is (igazoljuk!). Fordítva nem igaz, pl. az $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ vektorok függetlenek a $\mathbb{Q}$ test fölött, de lineárisan összefüggők $\mathbb{F}_2$ fölött, hisz összegük a zérusvektor.

3. megoldás: A $\mathbf{v}_i$ vektorokból képezzük a $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\ldots|\mathbf{v}_k] \in \mathbb{F}_2^{l\times k}$ mátrixot.

$$\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{V} = [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_k.$$

A szorzat rangjára vonatkozó állítás (3.22. következmény) szerint $k = \mathrm{r}(\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{V}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{V})$, másrészt $\mathbf{V}$-nek k oszlopa van, tehát $\mathrm{r}(\mathbf{V}) \leqslant k$, így ezeket összevetve $\mathrm{r}(\mathbf{V}) = k$. Ugyanakkor $\mathrm{r}(\mathbf{V}) \leqslant l$, tehát $k \leqslant l$, azaz a legföljebb annyi a klubok száma, ahány lakosa van Páratlanvárosnak.

A fenti megoldásokban kapott $k \leqslant l$ becslés éles, hisz ha minden lakos alapít egy egyszemélyes klubot, akkor e klubokra mindkét feltétel fennáll, és számuk azonos a lakosok számával.

3.29. *a)* Az $\mathbb{R}^2$- és $\mathbb{R}^{3\times2}$-beli hipermátrixok külső szorzata $\mathbb{R}^{2\times3\times2}$-ba esik:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Így pl. ha 1-től indexeljük az elemeket, $t_{111} = 0$, $t_{222} = 6$, $t_{232} = 0$. Az Octave (7.1. – 2022) a Tensorlab (3.0 – 2016) csomaggal és a Python (3.10.8) különbözőképp jeleníti meg e tenzort, ráadásul Pythonban különböző eredményt kapunk, ha az első tényezőt 2 dimenziós vektorként (ill. 1×2-es mátrixként) vagy 2×1-es mátrixként adjuk meg. Az elemek indexelésében természetesen a Python 0-tól, az Octave 1-től indexel. Minden további magyarázat nélkül mellékeljük a programkódokat.

```
>> A = [1; 2];
>> B = [0 1; 2 3; 4 0];
>> T = outprod(A, B)
T =

ans(:,:,1) =

   0   2   4
   0   4   8

ans(:,:,2) =

   1   3   0
   2   6   0

>> T(1,1,1), T(2,2,2), T(2,3,2)
```

```
ans = 0
ans = 6
ans = 0
```

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az első tényezőre az

```
>> A = [1 2];
```

értékadást használjuk. Python esetén a kód a következő:

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([1,2])
>>> B = np.array([[0,1],[2,3],[4,0]])
>>> T = np.tensordot(A, B, axes=0)
>>> A
array([1, 2])
>>> T
array([[[0, 1],
        [2, 3],
        [4, 0]],

       [[0, 2],
        [4, 6],
        [8, 0]]])
>>> T.shape
(2, 3, 2)
>>> T[0,0,0], T[1,1,1], T[1,2,1]
(0, 6, 0)
```

Ugyanakkor a fenti kódban megcserélve az `A` értékét, megváltozik az eredmény. Ez első ránézésre nehezen észrevehető, de a szögletes zárójelek száma, valamint a két tömb közti üres sorok száma mindent megmagyaráz, amit a `T.shape` értéke is világossá tesz.

```
>>> A = np.array([[1], [2]])
>>> T = np.tensordot(A, B, axes=0)
>>> T
array([[[[0, 1],
         [2, 3],
         [4, 0]]],


       [[[0, 2],
         [4, 6],
         [8, 0]]]])
>>> T.shape
(2, 1, 3, 2)
>>> T[0,0,0,0], T[1,0,1,1], T[1,0,2,1]
(0, 6, 0)
```

b) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 6\end{array}\right]$

c) $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc}3 & 0 & 5 & 0\\ 6 & 0 & 10 & 0\end{array}\right]$

d) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc||cc|cc}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

e) $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

Pythonban a kód:

```
>>> T
array([[[0, 0, 0],
        [0, 0, 0],
        [0, 0, 0]],

       [[1, 2, 0],
        [0, 0, 0],
        [2, 4, 0]],

       [[2, 4, 0],
        [0, 0, 0],
        [4, 8, 0]]])
>>> T[2,2,1]
8
```

Octaveban a szorzattenzor és egy adott eleme:

```
>> outprod([0;1;2], [1;0;2], c=[1;2;0])
ans =

ans(:,:,1) =

   0   0   0
   1   0   2
   2   0   4

ans(:,:,2) =

   0   0   0
   2   0   4
   4   0   8

ans(:,:,3) =

   0   0   0
   0   0   0
   0   0   0

>> ans(3,3,2)
ans = 8
```

3.30. *a)* A kontrakciós szorzat kiszámításához először megállapítjuk a típusát, ami $2\times 3\times 2$-es és 2×3-as tenzorok összeszorzása esetén $2\times 3\times 3$-as lesz:

$$\left\langle \left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 0 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right], \begin{bmatrix}2 & 1 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{bmatrix} \right\rangle_{2:0}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{3} & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

Ha $[a_{ijk}]$ jelöli az első, $[b_{kl}]$ a második és $[t_{ijl}]$ a szorzat tenzort, akkor pl.

$$t_{002} = \sum_{k=0}^{1} a_{00k} b_{k2} = a_{000} b_{02} + a_{001} b_{12} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3.$$

Az itt szereplő elemeket színessel ki is emeltük. A feladatban a kontrakciós szorzat indexeit megadó 2 : 0 el is hagyható, hisz ez az alapértelmezés, azaz az első tenzor utolsó, és a második tenzor első indexére való összegzés. A Python-kódban óvatosnak kell lenni az indexelések különbözősége miatt:

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.ndarray(shape=(2,3,2))
>>> A[:,:,0] = np.array([[1,0,1],[0,1,1]])
>>> A[:,:,1] = np.array([[2,1,0],[0,0,1]])
>>> B = np.array([[2,1,1],[0,0,1]])
>>> T = np.tensordot(A, B, axes=1)
>>> T.shape
(2, 3, 3)
>>> T[:,:,0]
array([[2., 0., 2.],
       [0., 2., 2.]])
>>> T[:,:,1]
array([[1., 0., 1.],
       [0., 1., 1.]])
>>> T[:,:,2]
array([[3., 1., 1.],
       [0., 1., 2.]])
```

b) E szorzatban mindkét tenzornak a második indexére megy az összegzés, így a kontrakciós szorzat $2 \times 2 \times 2$-es lesz:

$$\left\langle \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{1:1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Itt például az előző pont jelöléseit használva

$$t_{010} = \sum_{j=0}^{2} a_{0j1} b_{0j} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

A Python-kód az előző pontbeli kód folytatásaként a következő:

```
>>> T = np.tensordot(A, B, axes=([1],[1]))
>>> T
array([[[3., 1.],
         [5., 0.]],

        [[2., 1.],
         [1., 1.]]])
>>> T[:,:,0]
array([[3., 5.],
       [2., 1.]])
>>> T[:,:,1]
array([[1., 0.],
       [1., 1.]])
```

3.31. *a)* Igaz, *b)* hamis, *c)* igaz.

3.32. A bizonyítások közvetlenül következnek a valós számok közti műveletek tulajdonságaiból. Mintaként bebizonyítjuk az *a)* állítást.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \\ &\overset{*}{=} [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \end{aligned}$$

A *-gal jelzett egyenlőségnél használjuk a számok összeadásának kommutativitását. A többi állítás hasonlóan egyszerűen bizonyítható.

3.33. Helyettesítés előtt:

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

Az $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ helyettesítés elvégzése után

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3.34.

a) A 3.46. tétel bizonyításának *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* lépése szerint ha egy $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel az egységmátrixba lehet transzformálni, akkor az elemi sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve az $\mathbf{I}$-t $\mathbf{A}$-ba transzformálják. Ez viszont azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó elemi mátrixok szorzata épp $\mathbf{A}$.

Elemi sorművelet	Elemi mátrix	Inverz
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$		
$\downarrow\ S_2 - 3S_1$	$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$		
$\downarrow\ -S_2$	$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
$\downarrow\ S_1 - 2S_2$	$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		

A fenti átalakítás nyomán tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$, amiből $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $\mathbf{A}$-t három elemi mátrix szorzatára bontottuk.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

e) $\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\3&2&7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$

f) $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

3.35. Legyen $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$. Négyzete a zérusmátrix, azaz

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Innen vagy $a = d = 0$ és b vagy c legalább egyike 0, vagy $a \neq 0$, $c \neq 0$ és $b = -a^2/c$, $d = -a$.

3.36. A feladat érdekes, abban a Fibonacci-sorozat elemei bukkannak föl. Ez az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ egyenlőségekkel definiált sorozat, melynek első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,.... Tekintsük **B** néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1&f_2\\f_2&f_3\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_2&f_3\\f_3&f_4\end{bmatrix}.$$

Ennek alapján azt sejtjük, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix}f_{n-1}&f_n\\f_n&f_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Az állítás $n = 1,2,3$ esetén igaz, és n-ről öröklődik $n+1$-re, ui.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}f_{n-1}&f_n\\f_n&f_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}f_n & f_{n+1}\\ f_{n-1}+f_n & f_n+f_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n&f_{n+1}\\f_{n+1}&f_{n+2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3.37. $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = u_iv_i$, $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} = u_ia_{ij}v_j$, $[\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{B}]_{ij} = a_{ik}b_{jk}$, $[\mathbf{ABC}]_{ij} = a_{ik}b_{kl}c_{lj}$, $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{ABC}\mathbf{v} = u_ia_{ij}b_{jk}c_{kl}v_l$.

3.38. Jelölje $\mathcal{E}$ a standard bázist. Ennek vektorait kifejeztük a $\mathcal{B}$ bázis elemeivel, az ezekből képzett mátrixszal tehát az $\mathcal{E}$-beli vektorok $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakja fölírható, tehát ez a $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$ áttérés mátrixa, azaz

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}.$$

Ennek inverze a keresett mátrix:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2&-2&1\\-1&3&-2\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

Ennek oszlopvektorai adják a $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{E}$-beli alakját.

3.39. Az összefüggések a blokkmátrixok szorzásából azonnal láthatók:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{I}\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{I}\end{bmatrix}.$$

3.40. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Először igazolni kell, hogy a kijelölt műveletek valóban elvégezhetők. Valóban, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{CXBD}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{XBD}^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ezután csak a két blokkmátrix szorzását kell elvégezni.

3.41. Az *a)* és a *b)* kérdésben a 3.39. feladat, míg a *c)* kérdésben a 3.40. feladat képlete használható.

a) $\begin{bmatrix}2&-3&0&0&0\\-1&2&0&0&0\\0&0&-5&3&3\\0&0&-16&9&10\\0&0&28&-16&-17\end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix}2&-3&7&-4&-4\\-1&2&-7&4&4\\0&0&-5&3&3\\0&0&-16&9&10\\0&0&28&-16&-17\end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix}-1&0&1&1&1\\2&-1&-1&-1&-1\\-1&1&1&0&0\\-1&1&0&1&0\\-1&1&0&0&1\end{bmatrix}.$

3.42. Ha $c \neq 0$ és **A**-nak van nullától különböző eleme, akkor $c\mathbf{A}$-nak is.

3.43. A három állítás igazolható formálisan, az elemi mátrixok általános alakban való felírásával. Másik lehetőség, hogy valamely elemi mátrixszal balról való szorzás elemi sorműveletet hajt végre a megszorzott **A** mátrixon, így csak ellenőrizni kell, hogy elemi mátrix és inverzének alkalmazása után valóban változatlan marad-e az **A** mátrix. Valóban, pl. az **A** mátrix i-edik és j-edik sorának cseréje után ismét felcserélve e két sort visszakapjuk az **A** mátrixot, tehát $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$. A másik két egyenlőség hasonlóan egyszerűen igazolható.

3.44. A fölcserélhetőségre vonatkozó $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalról $\mathbf{B}^{-1}$-gyel:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{BA})\mathbf{B}^{-1}.$$

Az asszociativitást használva

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}),$$

amiből a $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}.$$

3.45. Az első összefüggés blokkmátrixokként való szorzással igazolható. Az $\mathbf{A} = [a_{it}]$, $\mathbf{C} = [c_{tj}]$ jelöléssel $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{it}\mathbf{B}]$, $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D} = [c_{tj}\mathbf{D}]$. Így az $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$ szorzat ij-edik blokkja

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}\mathbf{B}c_{tj}\mathbf{D} = \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}c_{tj}\right)\mathbf{B}\mathbf{D}.$$

Ez az $[\mathbf{A}\mathbf{C}]_{ij}$ elem és a $\mathbf{B}\mathbf{D}$ szorzata, ami épp az $\mathbf{A}\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}\mathbf{D}$ mátrix ij-edik blokkja.

A másik egyenlőség ennek egyenes következménye, hisz

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{nm},$$

ami igazolja az összefüggést.

3.46. Első lépésként ellenőrizzük, hogy e képletek valóban megadják-e a mátrix inverzét. Az alábbi egyenlőség jobb oldalán a képletekből visszahelyettesítéssel kapott mátrix, amiről egyszerű beszorzással ellenőrizhető, hogy valóban a megadott mátrix inverze. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk az $a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{21} = c$, $a_{22} = d$ rövidítéseket:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} a^{-1} + a^{-1}b\left(d - ca^{-1}b\right)^{-1}ca^{-1} & -a^{-1}b\left(d - ca^{-1}b\right)^{-1} \\ -\left(d - ca^{-1}b\right)^{-1}ca^{-1} & \left(d - ca^{-1}b\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Ha $M(n)$, ill. $I(n)$ jelöli két mátrix összeszorzásának, ill. egy mátrix invertálásának műveletigényét, akkor a feladatbeli képletek szerint $I(2n) \leqslant 2I(n) + 6M(n) + 3n^2$, ahol a Strassen-formulák alkalmazása esetén $M(n) \leqslant cn^{\log_2 7}$, amiből adódik, hogy van olyan C konstans, hogy $I(n) \leqslant Cn^{\log_2 7} \leqslant Cn^{2.81}$.

Vegyük észre, hogy e képletek csak akkor használhatók, ha garantálható, hogy minden lépésben a $2n$ rendű mátrix bal felső n rendű részmátrixa ($a_{11} = a$) és a $c_5 = a_{21}a_{11}^{-1}a_{12} - a_{22} = ca^{-1}b - d$ mátrix invertálható. Ez nem teljesül mindig, ha azonban a mátrix pozitív definit, akkor igen (ld. később a 8.37. definíciót és a 8.38. tételt). Egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív definit és $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, így $\mathbf{A}$ helyett $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálandó, majd még egy mátrixszorzás nem változtat a művelet aszimptotikus viselkedésén.

3.47. Elég megmutatni, hogy

$$\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\right) = \mathbf{I},$$

mert ez a formula igazolása mellett azt is bizonyítja, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ invertálható.

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) \\
&= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}1\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\
&\overset{*}{=} \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} \\
&= \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

A $*$-gal jelzett egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy 1×1-es mátrixszal való szorzás egybeesik a skalárral való szorzással, a skalár tényező pedig egy mátrixszorzatban áttehető más helyre, így az adott törtkifejezésben egyszerűsíthettünk vele.

3.48. Első lépésként kifejezzük az új mátrixot $\mathbf{A}$-ból mátrixműveletekkel. Legyen $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ az i-edik és j-edik standard egységvektor. Ekkor a módosított mátrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}$. Erre alkalmazható a Sherman–Morrison-formula az $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{e}_j$ választással.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{-1} = \left(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}\right)^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i(\varepsilon\mathbf{e}_j)^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \varepsilon\mathbf{e}_j^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i} \\
&= \mathbf{A}^{-1} - \varepsilon\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*i}(\mathbf{A}^{-1})_{j*}}{1 + \varepsilon(\mathbf{A}^{-1})_{ji}}
\end{aligned}$$

3.49. Az előző példa alkalmazásával

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{10}\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*1}(\mathbf{A}^{-1})_{1*}}{1 + \frac{1}{10}(\mathbf{A}^{-1})_{11}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}}{1 + \frac{1}{10}\cdot 0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/25 & -6/25 & 0 \\ 0 & -6/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 173/125 & -197/125 & 3/5 \\ 3/5 & -197/125 & 341/250 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tizedestörtekkel számolva:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.4 & 0.6 & 0.0 \\ -0.4 & 1.4 & -1.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.6 & 1.4 & -0.4 \\ 0.0 & 0.6 & -0.4 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.400 & 0.600 & 0.000 \\ -0.400 & 1.384 & -1.576 & 0.600 \\ 0.600 & -1.576 & 1.364 & -0.400 \\ 0.000 & 0.600 & -0.400 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

3.50. *a)* Igaz, hisz ha **A** és **B** szimmetrikus, azaz minden ij indexpárra $a_{ij} = a_{ji}$ és $b_{ij} = b_{ji}$, akkor bármely c-re $ca_{ij} + b_{ij} = ca_{ji} + b_{ji}$ is fennáll. *b)* Igaz, hisz ha $a_{ij} = -a_{ji}$ és $b_{ij} = -b_{ji}$, akkor bármely c-re $ca_{ij} + b_{ij} = -(ca_{ji} + b_{ji})$ is fennáll. *c)* Igaz, hisz lépcsős alakú mátrix minden főátló alatti eleme 0. *d)* Hamis, például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix felsőháromszög-mátrix, de nem lépcsős alakú.

3.51. Ha **P** permutáló mátrix, akkor $\mathbf{P}^\mathsf{T}$ is, mely elemi sorműveletekkel megkapható az egységmátrixból. Ha **I**-ből eljutunk a $\mathbf{P}^\mathsf{T}$-ba az $i_k \leftrightarrow j_k$ sorcserékkel ($k = 1, 2, \dots, s$), akkor **I**-ből az $i_k \leftrightarrow j_k$ oszlopcserékkel a **P**-be jutunk. Az állítás másik fele abból következik, hogy minden permutáló mátrix $\mathbf{E}_{i_k j_k}$ típusú elemi mátrixok szorzata, azaz $\mathbf{P} = \mathbf{E}_{i_s j_s} \dots \mathbf{E}_{i_2 j_2} \mathbf{E}_{i_1 j_1} \mathbf{I}$. Ha $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$, azaz $\mathbf{E}_{i_s j_s} \dots \mathbf{E}_{i_2 j_2} \mathbf{E}_{i_1 j_1} \mathbf{A} = \mathbf{B}$, akkor ez épp azt jelenti, hogy **B**-t az **A**-ból azokkal a sorcserékkel kaptuk meg, amelyekkel **I**-ből a **P**-t. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}$, azaz az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{E}_{i_1 j_1}\mathbf{E}_{i_2 j_2} \dots \mathbf{E}_{i_s j_s} = \mathbf{B}^\mathsf{T}$ egyenlőség igazolja az oszlopokra vonatkozó állítást.

3.52. Jelölje a három megadott mátrixot rendre **A**, **B**, **C**. Tanulmányozzuk az eredményeket, és próbáljuk meg általános szabályokat felfedezni (ld. a következő feladatot).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 64 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^3 = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.53. *a)* Ha egy permutáló mátrix sorait permutáljuk, akkor továbbra is permutáló mátrixot kapunk, így permutáló mátrixok szorzata és bármely pozitív egész kitevős hatványa permutáló mátrix. Ha egy **P** permutáló mátrixban minden 1-est egy tetszőleges számra cserélünk, akkor az így kapott **K** kígyóban minden olyan helyen, ahol egy $\mathbf{P}^n$ hatványában 0 szerepel, a $\mathbf{K}^n$-ben is 0 lesz, így $\mathbf{K}^n$ is kígyó.

b) Ha egy **K** kígyóban van olyan sor, melyben minden elem 0, akkor redukált lépcsős alakjában lesz zérussor, tehát nem invertálható. Tudjuk, hogy permutáló mátrix inverze a transzponáltja, ami ugyancsak permutáló mátrix. Így ha a **K** mátrix i-edik sorának egyetlen nemnulla eleme k_i, akkor $\mathbf{K}^\mathsf{T}$ i-edik oszlopában is k_i az egyetlen nemnulla elem. Ha ekkor $\mathbf{K}^\mathsf{T}$-ban minden k_i elemet $1/k_i$-re cserélünk (ahol i végigfut az oszlopok indexein), a **K** inverzéhez jutunk.

3.54. Ha **A** és **B** felcserélhetők, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, akkor

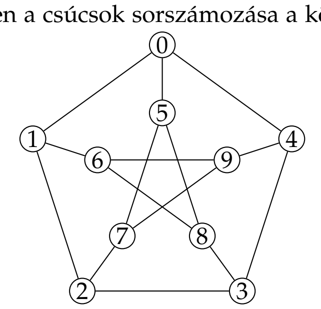
$$(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = (\mathbf{BA})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{AB},$$

tehát **AB** is szimmetrikus. Ha viszont **AB** szimmetrikus, akkor

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{BA},$$

tehát **A** és **B** felcserélhetők.

3.55. Legyen a csúcsok sorszámozása a következő:

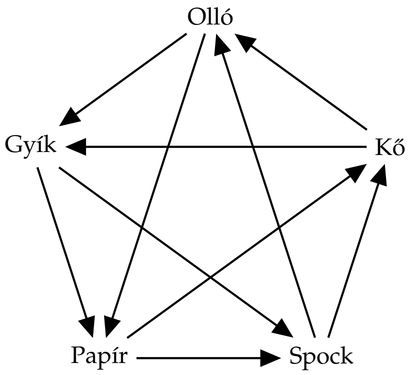


Ekkor a szomszédság mátrix (adjacenciamátrix):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy bármely két csúcs vagy szomszédos, vagy van köztük egy kéthosszú út! Minden csúcsból saját magába pontosan 3 kéthosszú út vezet, mivel minden csúcs foka 3, ezért $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}$ főátlójában 3-asok, egyebütt 1-esek vannak, ami egyenlő $\mathbf{1}_{10\times 10} + 2\mathbf{I}$-vel.

3.56. A játék gráfja



A szomszédsági mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\mathbf{A}^3$ főátlójában csupa 3-as van, ez $5 \cdot 3 = 15$ irányított körutat azaz három irányított háromszöget jelent, de mindegyiket háromszor számoltuk, tehát 5 a válasz. Ez a gráfról is leolvasható. *b)* Ez is 5. *c)* $k = 4$, mert $\mathbf{A}^4$ a legkisebb kitevőjű olyan hatvány, melyben minden elem pozitív. *d)* Az $\mathbf{A}^5$ elemei alapján 10.

3.57. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így az $\mathbf{A}$ bázisfelbontása

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$$

Az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban, azaz

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{B}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

ahol az $\mathcal{E}$ indexszel a standard, $\mathcal{B}$-vel a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakját jelöltük ugyanannak a vektornak. Például

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ azaz } [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora.

3.58. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

3.59. Egy bázisfelbontás az $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ összefüggést felhasználva $(c\mathbf{u})(\frac{1}{c}\mathbf{v}^\mathsf{T})$, ahol c a $\mathbf{v}$ első nemnulla koordinátája.

3.60. A bázisfelbontások:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = [2] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$

b) $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \mathbf{I}_n,$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} [1],$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{I}_3.$

Az LU-felbontások:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = [1] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$

b) $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \mathbf{I}_n,$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

3.61.

a) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

b) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 7/9 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 0 & -9/5 & -17/5 \\ 0 & 0 & -23/9 \end{bmatrix}.$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; \\ \frac{2}{3} & 1 & 0; \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} & 1; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.00 & 2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.50 & -1.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.50 \end{bmatrix}.$

3.62.

a) $\mathbf{y} = (0, 3, 4)$, $\mathbf{x} = (-1, -1, 2)$.
b) $\mathbf{y} = (0, 3, 1)$, $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$.
c) $\mathbf{y} = (3, -17/5, -23/9)$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$.
d) $\mathbf{y} = (5.6, 0.4, 1.4)$, $\mathbf{x} = (1.2, 2.0, 0.4)$.

3.63. Mivel a 3.71. példából ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp a (3.6)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_4 = 1$, $x_3 = s$ a szabad változó, $x_2 = -s$ és $x_1 = s$. A megoldás $\mathbf{x} = (s, -s, s, 1) = (0, 0, 0, 1) + s(1, -1, 1, 0)$.

3.64. A $\mathbf{B}$ mátrix LU-felbontását használva először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] = [1\ \ 0\ \ 0]$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] + [y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [0\ 1\ 0]$. Behelyettesítés után $[y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [-\frac{1}{2}\ 1\ 0]$. Végül a harmadik sorral való szorzásból:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, így $[y_{31}\ y_{32}\ y_{33}] = [0\ -\frac{1}{2}\ 1]$, tehát

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3.65.

a) Az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ egyenletből

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

míg az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ egyenlet megoldása, egyúttal $\mathbf{A}$ inverze

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/24 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

b) $$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.66. Tegyük fel, hogy létezik az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak két LU-felbontása is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$. Mivel $\mathbf{A}$ invertálható, ezért $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_2$ is. Ugyanis ha pl. $\mathbf{L}_1$ nem volna invertálható, akkor az oszloptérének dimenziója kisebb lenne n-nél, és mivel $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ oszlopvektorai az $\mathbf{L}_1$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi, ezért e szorzat oszlopterének dimenziója is kisebb lenne n-nél, azaz $\mathbf{A}$ nem lenne invertálható. A többi mátrix invertálhatósága hasonlóan igazolható. Balról $\mathbf{L}_1$, jobbról $\mathbf{U}_2$ inverzével szorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2.$$

A bal oldalon két felsőháromszög-mátrix szorzataként egy felsőháromszög-mátrix van, míg a jobb oldalon két alsóháromszög-mátrix szorzata, ami alsóháromszög-mátrix. Ráadásul a jobb oldal egység főátlójú. Ez csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, azaz ha $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

3.67. *a)* Az első két sor cseréje eliminálás után

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrixokkal $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{LU} = \mathbf{PLU}$, mivel $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$.

b) Először egy $S_1 \leftrightarrow S_3$, majd egy $S_2 \leftrightarrow S_3$ sorcsere szükséges:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.68. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert $\mathbf{P}$-vel szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$, majd a $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ helyettesítést elvégezve $\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$ adódik. Ennek megoldását az $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával számíthatjuk ki.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Pb} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

3.69. Az első esetben

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{23} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

egyenlőségből leolvasható, hogy $0 = a_{11} = 1 \cdot u_{11}$, amiből $u_{11} = 0$. Akkor viszont $1 = a_{21} = l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$, ami ellentmondás, tehát e felbontás nem létezik. A másik esetben

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{23} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

egyenlőségben a jobb oldalon az $\mathbf{L}_{1*}$ sorral való szorzásból $u_{11} = u_{12} = u_{13} = 1$, az $\mathbf{L}_{2*}$ sorral való szorzásból $l_{21} = u_{23} = 0$, $u_{23} = 1$, végül az $\mathbf{L}_{3*}$ sorral való szorzásból $l_{31} = 0$, így $1 = a_{32} = \mathbf{L}_{3*}\mathbf{U}_{*2} = l_{31}u_{12} + 0 + 0 = 0$, ami ismét ellentmondás.

Mivel sorcserékkel háromszögalakra hozható a mátrix, ezért fejben is kiszámolható a PLU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.70. *a)* Az összefüggés igazolása történhet egyszerű beszorzással. De elegánsabb, ha mi magunk találjuk ki az LU-felbontást, és mindjárt az általános esetre. Legyen

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{n-2} & 1 & \\ & & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & & \\ & d_2 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} & u_{n-1} \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

Az elemek összehasonlításából

$$\begin{aligned} b_1 &= d_1 & &\rightsquigarrow & d_1 &= b_1, \\ a_k &= l_k d_k & &\rightsquigarrow & l_k &= a_k/d_k, \\ c_k &= u_k & &\rightsquigarrow & u_k &= c_k, \\ b_{k+1} &= l_k u_k + d_{k+1} & &\rightsquigarrow & d_{k+1} &= b_{k+1} - a_k c_k/d_k. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást n-edrendű tridiagonális mátrixra is.

b) Az előző képletek alkalmazásával

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$