8.1. *1)* Igaz. *2)* Igaz. *3)* Hamis. *4)* Igaz.
Definíció szerint $\mathbf{A}$ ortogonálisan hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha van olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ és $\mathbf{C}$ unitéren hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha van olyan unitér $\mathbf{U}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$. De ortogonális $\mathbf{Q}$ és unitér $\mathbf{U}$ esetén $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$ és $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$.

8.2. A három mátrix egyike sem diagonalizálható az $\mathbb{R}$ fölött. Az első azért nem, mert komplexek a sajátértékei, a második és harmadik esetén a geometriai multiplicitása az egyetlen sajátértéknek kisebb az algebrainál. Az első ugyan $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható, de unitéren nem, így unitér hasonlóságot keresünk egy felsőháromszög-mátrixhoz. A másik két mátrix esetén, mivel minden sajátértékük valós, ortogonálisan hasonlóak egy felsőháromszög-mátrixhoz. Ezeket fogjuk megkonstruálni.

1) Az első mátrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 8 = (2\sqrt{2}\mathrm{i} - \lambda)(-2\sqrt{2}\mathrm{i} - \lambda).\end{aligned}$$

A sajátaltér meghatározásához

$$\begin{aligned}\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathrm{i}2\sqrt{2}\mathbf{I}) &= \operatorname{rref}\begin{bmatrix} -1-2\sqrt{2}\mathrm{i} & 3 \\ -3 & 1-2\sqrt{2}\mathrm{i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ami alapján $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathrm{i}2\sqrt{2}\mathbf{I})$ összes vektora

$$\begin{bmatrix} \frac{1-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Ha bizonytalanok vagyunk a komplex számokkal és mátrixokkal való számolásban, érdemes lehet szimbolikus számításokra is alkalmas programot használni. A sajátalteret kifeszítő vektor hosszának négyzete $\frac{1-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}\frac{1+2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3} + 1 = 2$, így a hosszával leosztva kapjuk az $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\mathrm{i}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vektort. Az $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2]$ mátrixban $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$, pl. $\mathbf{u}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\mathrm{i})$, tehát

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\mathrm{i} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

ami így unitér, és az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisban az $\mathbf{A}$ alakja

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}\mathrm{i} & \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\mathrm{i} \\ 0 & -2\sqrt{2}\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

ami tehát egy olyan felsőháromszög-mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek vannak.

2) A második mátrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (2-\lambda)^2.\end{aligned}$$

Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért a $\lambda_{1,2} = 2$-höz tartozó sajátaltér $\operatorname{span}((1,1))$. Tehát a sajátaltér egydimenziós, azaz geometriai multiplicitása 1, miközben az algebrai 2, így a mátrix nem diagonalizálható. A sajátaltér egy ortonormált bázisát kiegészítjük a tér ortonormált bázisává. Az $(1,1)$ sajátvektor lenormálva (osztva a hosszával) egy egységnyi sajátvektor. Véve az egyik rá merőleges vektort a következő két ortonormált bázis valamelyikét kapjuk:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

E bázisok valamelyikének vektoraiból álló mátrix lesz az áttérés ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrixa. Legyen pl.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3) A harmadik mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = (3-\lambda)^3,\end{aligned}$$

így a sajátértékek $\lambda_{1,2,3} = 3$. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ összes vektora az $x_3 = 2t$ paraméterválasztással $(x_1, x_2, x_3) = (t, 2t, 2t)$, azaz a sajátaltér $\operatorname{span}((1,2,2))$. Tehát a $\lambda = 3$ geometriai multiplicitása 1, míg algebrai multiplicitása 3, és $1 < 3$, így a mátrix nem diagonalizálható. Normálás után az $\frac{1}{3}(1,2,2)$ egy egységnyi sajátvektor. Ehhez választhatjuk második vektornak a rá merőleges $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ egységvektort. A harmadik vektor az 1, 2, 2 koordináták ügyes permutálásával is megtalálható: pl. a $(2,-2,1)$ vektor merőleges az előző kettőre. De a biztos módszer, ha ezt egy vektori szorzással számoljuk ki:

$$(1,2,2) \times (2,1,-2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-6, 6, -3).$$

Normálás után $\frac{1}{3}(-2,2,-1)$, vagy választhatjuk az ellentettjét, a $\frac{1}{3}(2,-2,1)$ vektort. Tekintsük a

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix},\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

bázist. E bázisvektorokból fölírt mátrix, azaz a $\mathcal{B}$-ről az $\mathcal{E}$-re való áttérés mátrixa

$$\mathbf{Q}_0=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{A}$ alakja a $\mathcal{B}$ bázisban

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&-1\\0&1&2\\2&-1&3\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\\&=\left[\begin{array}{c|cc}3&0&3\\\hline 0&3&0\\0&3&3\end{array}\right].\end{aligned}$$

Ez nem háromszög alakú, így a jobb alsó 2×2-es

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}3&0\\3&3\end{bmatrix}$$

blokkon újabb transzformációt kell alkalmazni. Mivel $\mathbf{A}_1$ sajátértékei $\lambda_{2,3}=3$, ami leolvasható a mátrixról, de tudhatjuk onnan is, hogy azok megegyeznek az $\mathbf{A}$ megmaradt két sajátértékével. A 3-hoz tartozó sajátvektor

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}_1-3\mathbf{I})=\operatorname{rref}\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$$

alapján $(x_1,x_2)=(0,t)$, ahonnan a sajátaltér $\operatorname{span}((01))$. A $(0,1)$ vektorra merőleges egyik egységvektor $(1,0)$, így

$$\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Ha az áttérés mátrixa

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0\left[\begin{array}{c|c}1&\mathbf{0}^\mathsf{T}\\\hline\mathbf{0}&\mathbf{Q}_1\end{array}\right],$$

akkor e választással $\mathbf{A}$ felső háromszög alakú lesz, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0\left[\begin{array}{c|c}1&\mathbf{0}^\mathsf{T}\\\hline\mathbf{0}&\mathbf{Q}_1\end{array}\right]&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

és ezzel számolva

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&-1\\0&1&2\\2&-1&3\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\2&1&-2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3&3&0\\0&3&3\\0&0&3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

valóban háromszög-mátrixot kaptunk. Ha első lépésben a

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\},$$

bázist választottuk volna, akkor egyetlen transzformációval megkaptuk volna a háromszög alakú $\mathbf{T}$ mátrixot. Általában az ilyen szerencsés választásra igen kicsi az esély.

8.3. *1)* Az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|&=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&3-\lambda&2\\0&2&4-\lambda\end{vmatrix}\\&=-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda=-(\lambda^2-9\lambda+18)\lambda\\&=(6-\lambda)(3-\lambda)(0-\lambda),\end{aligned}$$

így a sajátértékek $\lambda_1=6$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=0$. Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus, ezért ortogonálisan diagonalizálható. Mivel a sajátértékei különbözőek, minden sajátaltér egydimenziós, így elég minden sajátértékhez választani egy sajátvektort, az így kapott vektorok ortogonális bázist fognak alkotni. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})=\operatorname{rref}\begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

így $\mathcal{N}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})$ összes vektora, azaz az $(\mathbf{A}-6\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer összes megoldása az $x_3=2t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}t.$$

Tehát $(6,(1,2,2))$ egy sajátpár. Hasonló számításokkal azt kapjuk, hogy $(3,(-2,-1,2))$, és $(0,(2,-2,1))$ sajátpárok. Normálva a vektorokat a $(6,\frac{1}{3}(1,2,2))$, $(3,\frac{1}{3}(-2,-1,2))$, $(0,\frac{1}{3}(2,-2,1))$ sajátpárok adódnak. A normált sajátvektorokból mint oszlopvektorokból képzett $\mathbf{Q}$ mátrixszal és a sajátértékekből képzett diagonális mátrixokkal $\mathbf{A}$ egy sajátfelbontása:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda)^2, \end{aligned}$$

így a sajátértékek $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ sajátaltér vektorai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

$\lambda_{23} = 1$ esetén

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Innen a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer összes megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s.$$

A sajátalterek tehát (a tér indexében a sajátérték):

$$\mathcal{V}_{-1} = \operatorname{span}((-1,0,1)),\ \mathcal{V}_1 = \operatorname{span}((1,0,1),(0,1,0)).$$

A $\mathcal{V}_1$ teret generáló két vektor merőleges egymásra, így nem kell ortogonalizálnunk. Tehát az ortonormált bázis vektorai a hosszakkal való osztás után:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E vektorokból képzett ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrixszal és a sajátértékekből álló $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixszal a sajátfelbontás $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^\mathsf{T}$, azaz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) Az $\mathbf{A} = \mathbf{1}_{3\times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{23} = 0$. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ sajátaltér vektorai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda_{23} = 0$ esetben

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\mathbf{A} = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ sajátaltér vektorai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A sajátalterek tehát

$$\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}((1,1,1)),\ \mathcal{V}_0 = \operatorname{span}((-1,1,0),(-1,0,1)).$$

A $\mathcal{V}_0$-ból ki kell választani két merőleges vektort, mert az e teret generáló két vektor nem merőleges egymásra. Egyszerű megoldás, ha a $\mathcal{V}_3$ generáló vektorának és $\mathcal{V}_0$ egyik vektorának vektori szorzatát kiszámoljuk, az biztosan $\mathcal{V}_3$-ba fog esni. Például

$$(1,1,1) \times (-1,1,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,2).$$

Tehát az ortonormált bázis vektorai

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

E vektorok sorrendjét megváltoztatva, vagy bármelyiküket -1-gyel beszorozva további ortonormált bázisokat kaphatunk. E bázisvektorokból mint oszlopvektorokból képzett ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrixszal és az oszlopok sorrendjének megfelelően, a hozzájuk tartozó sajátértékekből képzett diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^\mathsf{T}$ az $\mathbf{A}$ sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20. \end{aligned}$$

E polinomról nem látszanak a gyökei, ezért racionálisgyök-kereséssel próbálkozhatunk. A racionálisgyök-teszt (ld. 11.39. tétel) szerint a szóba jöhető ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10, ± 20. A Horner-'módszerrel azonnal látjuk, hogy pl. a 2 egy gyök:

	-1	9	-24	20
2	-1	7	-10	0

A másik két gyök már az e táblázatból leolvasható másodfokú $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ egyenletből 2 és 5. Így a sajátértékek $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 5$. A $\lambda_{12} = 2$ sajátérték esetén

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $(1,1,1) \cdot (x,y,z) = 0$ egyenlet megoldásai

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = 5$ sajátérték esetén

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ sajátaltér vektorai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Így a sajátalterek

$$\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}((-1,1,0),(-1,0,1)), \; \mathcal{V}_5 = \operatorname{span}((1,1,1)).$$

A $\mathcal{V}_2$-ből ki kell választani két merőleges vektort, mert az e teret generáló két vektor nem merőleges egymásra. Az előző mátrixnál látotthoz hasonlóan vehetjük a $\mathcal{V}_2$ egy és a $\mathcal{V}_5$ egy vektorának vektori szorzatát, például

$$(1,1,1) \times (-1,1,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,2).$$

Tehát ortonormált bázis lehet a következő

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \right\}.$$

Végtelen sok egyéb sajátvektorokból álló ortonormált bázis is létezik, hisz $\mathcal{V}_3$-ból végtelen sok ortonormált vektorpár választható ki. A $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix e bázis vektoraiból áll, míg a diagonális $\mathbf{\Lambda}$ főátlóbeli elemei a sajátértékek (a bázisvektoroknak megfelelő sorrendben):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

5) Az

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda, \end{aligned}$$

így a sajátértékek $\lambda_{1,2} = 3$, $\lambda_3 = 0$. A $\lambda_{12} = 3$ sajátérték esetén

$$\operatorname{rref}(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $(1,1,1) \cdot (x,y,z) = 0$ egyenlet megoldásai

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = 0$ sajátérték esetén

$$\operatorname{rref}(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}) = \mathcal{N}(\mathbf{B})$ sajátaltér vektorai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Így a sajátalterek

$$\mathcal{V}_0 = \operatorname{span}((1,1,1)), \; \mathcal{V}_3 = \operatorname{span}((-1,1,0),(-1,0,1)).$$

A $\mathcal{V}_3$-ból ki kell választani két merőleges vektort, mert az e teret generáló két vektor nem merőleges egymásra. Az előző mátrixnál látotthoz hasonlóan vehetjük a $\mathcal{V}_0$ egy és a $\mathcal{V}_3$ egy vektorának vektori szorzatát, például

$$(1,1,1)\times(-1,1,0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=(-1,-1,2).$$

Tehát ortonormált bázis lehet a következő

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Végtelen sok egyéb sajátvektorokból álló ortonormált bázis is létezik, hisz $\mathcal{V}_3$-ból végtelen sok ortonormált vektorpár választható ki. A $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix e bázis vektoraiból áll, míg a diagonális $\mathbf{\Lambda}$ főátlóbeli elemei a sajátértékek:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

E feladatra egy egészen másik – sokkal egyszerűbb – megoldást is kaphattunk volna, ha mindjárt az elején észrevesszük, hogy $\mathbf{B}=5\mathbf{I}-\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ sajátpárjai $(5,\mathbf{x})$ és $(2,\mathbf{y})$, akkor

$$\mathbf{B}\mathbf{x}=(5\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=5\mathbf{I}\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x}=5\mathbf{x}-5\mathbf{x}=0\mathbf{x},$$

továbbá

$$\mathbf{B}\mathbf{y}=(5\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{y}=5\mathbf{y}-2\mathbf{y}=3\mathbf{y}.$$

Tehát a két mátrix sajátalterei azonosak, és $\mathbf{A}$ sajátértékei $3,3,0$.

6) Az $\mathbf{A}=\left[\begin{smallmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{smallmatrix}\right]$ mátrixról látható, hogy 1 a rangja, így máris tudjuk, hogy $\lambda_{12}=0$ kétszeres multiplicitású sajátérték. Ha még azt is észrevesszük, hogy $\mathbf{A}=\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}=\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{v}=(1,2,2)$, és figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{v}$ egyenesére eső vetülete, akkor a $(\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T})\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v})$ egyenlőséget használva

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}9,$$

azaz a $(9,(1,2,2))$ sajátpár. Természetesen a karakterisztikus polinom meghatározása is erre vezet: $\chi_\mathbf{A}=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=-\lambda^3+9\lambda^2$. A sajátalterek tehát

$$\mathcal{V}_9=\operatorname{span}((1,2,2)),\ \mathcal{V}_0=\mathcal{V}_9^\perp.$$

A $\mathcal{V}_0$ meghatározásához elég egy vektort választani belőle, ami lehet akár a $(2,1,-2)$ vagy a $(0,-1,1)$ vektor. Utóbbiból

$$(1,2,2)\times(0,-1,1)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=(4,-1,-1).$$

E vektor hossza $\sqrt{4^2+1+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Így egy lehetséges ortonormált bázis a következő

$$\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

Egy másik lehetséges ortonormált bázis:

$$\left\{\frac{1}{3}(1,2,2),\frac{1}{3}(2,1,-2),\frac{1}{3}(2,-2,1)\right\}$$

Két lehetséges ortogonális diagonalizációval való sajátfelbontás a fenti bázisokból:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{4}{3\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}.$$

8.4. *a)* Nem. *b)* Nem. *c)* Normális. *d)* Normális. *e)* Normális. *f)* Normális. Az $\mathbf{X}$ mátrix normális, ha $\mathbf{X}^\mathsf{H}\mathbf{X}=\mathbf{X}\mathbf{X}^\mathsf{H}$. A szimmetrikus (*f)*), a ferdén szimmetrikus (*c)*), az ortogonális (*d)*) mátrixok normálisak. A többi mátrixról a szorzások elvégzésével tudjuk ellenőrizni, hogy normálisak-e. A ciklikus (cirkuláns) mátrixokról a 8.9. feladatban bizonyítjuk általában, hogy normálisak, erre példa a *e)*-beli mátrix. Csak az *a)* és *b)* mátrixok nem normálisak:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0&2&1\\3&0&2\\4&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\2&0&3\\1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&6\\2&13&12\\6&12&25\end{bmatrix}\\ \neq&\begin{bmatrix}0&3&4\\2&0&3\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&1\\3&0&2\\4&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&12&6\\12&13&2\\6&2&5\end{bmatrix},\\ &\begin{bmatrix}1&2i\\-2i&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2i\\-2i&-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2+2i\\2-2i&5\end{bmatrix}\\ \neq&\begin{bmatrix}1&2i\\-2i&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2i\\-2i&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2+2i\\-2-2i&5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

8.5. *1)* Az $\mathbf{A}=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|&=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}\\&=\lambda^2+1,\end{aligned}$$

így a sajátértékek i és $-\mathrm{i}$, a sajátpárok

$$\left(\mathrm{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i},1)\right), \quad \left(-\mathrm{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i},1)\right).$$

Az unitér diagonalizáláshoz tartozó sajátfelbontás

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\lambda, \end{aligned}$$

aminek a gyökei $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. A $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér meghatározásához

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \end{bmatrix},$$

ami alapján $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{span}((-\mathrm{i},1))$ a sajátaltér. A $\lambda_2 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér meghatározásához

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

ami alapján $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}((\mathrm{i},1))$. Könnyen látható, hogy a két generáló vektor merőleges egymásra, hiszen a skaláris szorzatuk

$$(-\mathrm{i},1) \cdot (\mathrm{i},1) = \overline{-\mathrm{i}} \cdot \mathrm{i} + \overline{1} \cdot 1 = -1 + 1 = 0.$$

Tehát az ortonormált bázis vektorai

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A belőlük képzett unitér $\mathbf{U}$ mátrix és a sorrendben a hozzájuk tartozó sajátértékek diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixa

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$ valóban fennáll, ui.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.$$

A karakterisztikus polinom gyökei a harmadik egységgyökök, azaz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

így $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{span}((1,1,1))$. A $\lambda_2 = \varepsilon$ sajátértékkel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}) = \operatorname{rref} \begin{bmatrix} -\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & 1 & -\varepsilon^2 \end{bmatrix},$$

így $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}) = \operatorname{span}((\varepsilon, \varepsilon^2, 1))$. Hasonló számítás után $\mathcal{N}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}) = \operatorname{span}((\varepsilon^2, \varepsilon, 1))$. Mindhárom sajátvektor mindegyik koordinátája egységnyi abszolút értékű komplex szám, így mindhárom vektor hossza $\sqrt{3}$. Ennek alapján

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$, ezért

$$\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

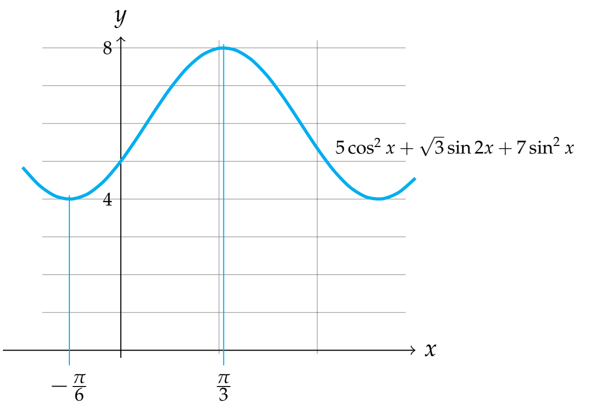
Kihasználva hogy $\varepsilon^3 = 1$, könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$.

8.6. A 8.15. és a 8.17. tétel alapján: *a)* $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}\|$, *b)* $(\bar{\lambda}, \mathbf{x})$, *c)* $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$, *d)* $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható.

8.7. *a)* $R_{\mathbf{A}}(c\mathbf{x}) = \frac{(c\mathbf{x})^{\mathsf{H}}\mathbf{A}(c\mathbf{x})}{(c\mathbf{x})^{\mathsf{H}}(c\mathbf{x})} = \frac{c^2(\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x})}{c^2(\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}} = R_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$, ami azt jelenti, hogy bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $R_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = R_{\mathbf{A}}(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|})$.

b) Az előző pont szerint $R_{\mathbf{A}}$ értékei egy $\mathcal{V}$ altér nemnulla vektorain azonosak az egységgömbnek e térbe eső részén felvett értékeivel. Ez a tartomány viszont korlátos és zárt, így a rajta folytonos valós értékű $R_{\mathbf{A}}$ függvénynek e tartományon van maximuma, ami megegyezik a szuprémumával.

c) $R_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t)) = 5\cos^2 t + 2\sqrt{3}\cos t \sin t + 7\sin^2 t$. Maximumát a 8-hoz tartozó $c(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$, minimumát a 4-hez tartozó $c(\cos(-\frac{\pi}{6}), \sin(-\frac{\pi}{6}))$ sajátvektorokban veszi fel ($c \neq 0$).



d) Legyen az önadjungált $\mathbf{A}$ unitér diagonalizáláshoz tartozó sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$, ahol a valós diagonális $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mátrix elemei nagyság szerint vannak indexelve ($\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$), és legyen $\mathbf{y} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}$, ahol $\|\mathbf{x}\| = 1$. Mivel $\mathbf{U}$ unitér, így $\|\mathbf{y}\| = 1$ is fennáll, és így

$$\begin{aligned}\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}\\ &= \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i| \leqslant \lambda_1 \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \lambda_1.\end{aligned}$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $(\lambda_1, \mathbf{x})$ sajátpár. Hasonlóképpen

$$\begin{aligned}\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \min_{\|\mathbf{y}\|=1} \mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}\\ &= \min_{\|\mathbf{y}\|=1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i| \geqslant \lambda_n \min_{\|\mathbf{y}\|=1} \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \lambda_n.\end{aligned}$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $(\lambda_n, \mathbf{x})$ sajátpár.

8.8. $\mathbf{A}$ önadjungált, így sajátértékei valós számok, másrészt $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható. Legyen az ezt biztosító ortonormált bázis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, azaz $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$, ahol $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$. Legyen $\mathcal{U} \leqslant \mathbb{K}^n$ egy $k > 0$ dimenziós altér, és tekintsük az $n-k+1$ dimenziós $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$ alteret. Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ egy egységvektor. Ilyen vektor létezik, mivel $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = n+1 > n$. Ekkor

$$\mathbf{x} = \sum_{i=k}^{n} x_i \mathbf{u}_i, \text{ ahol } \sum_{i=k}^{n} |x_i|^2 = 1,$$

így

$$\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=k}^{n} |x_i|^2 \lambda_i \leqslant \lambda_k.$$

Tehát egyrészt

$$\min_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{x}\|=1}} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \lambda_k,$$

másrészt az egyenlőség el is érhető, ha $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, hisz ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$ megfelel. Így az összes k dimenziós $\mathcal{U}$ altérre

$$\max_{\substack{\mathcal{U}\leqslant\mathbb{K}^n\\ \dim\mathcal{U}=k}} \min_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{U}\\ \|\mathbf{x}\|=1}} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_k.$$

A másik állítás ebből következik, ha azt a $-\mathbf{A}$ mátrixra, és az $n-k+1$ dimenziós $\mathcal{V}$ alterekre alkalmazzuk, ahol $-\mathbf{A}$ sajátértékei $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_n$, azaz $\mu_{n-k+1} = -\lambda_k$, ui.

$$\min_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{x}\|=1}} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}(-\mathbf{A})\mathbf{x} \leqslant \mu_{n-k+1} = -\lambda_k,$$

tehát

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{V}\\ \|\mathbf{x}\|=1}} \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \lambda_k.$$

8.9. *a)* Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\mathbf{R}^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^n = \mathbf{I}_n.$$

Általánosan kifejezve $[\mathbf{R}^k]_{ij} = 1$ pontosan akkor, ha a sorok és oszlopok 0-tól $n-1$-ig való indexelése mellett $j - i \equiv k \pmod n$, azaz $j-i$-nek n-nel való osztási maradéka k. A többi elem 0. Így világos, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1}\\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2}\\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}\\ &= c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{R} + c_2\mathbf{R}^2 + \dots + c_{n-1}\mathbf{R}^{n-1} = p(\mathbf{R}).\end{aligned}$$

b) A Fourier-mátrixok tulajdonságairól szóló 7.96. tétel szerint az $\omega = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/n}$ jelöléssel

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{F}_n\mathbf{R}\mathbf{F}_n^{-1} = \operatorname{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ összefüggés igazolásához tehát azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbf{R}$-nek a $(\lambda_k, \mathbf{x}_k) = (\omega^k, (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k}))$ sajátpárja, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ez igaz, hisz

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\\ 1 \end{bmatrix} = \omega^k \begin{bmatrix} 1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k} \end{bmatrix} = \lambda_k\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

c) Az előző pontbeli diagonalizálás minimális változtatással unitér diagonalizálássá változik, hisz a 7.96. tétel szerint $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{F}_n$ unitér, így

$$\mathbf{F}_n\mathbf{R}\mathbf{F}_n^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{F}_n\mathbf{R}\sqrt{n}\mathbf{F}_n^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{F}_n\right)\mathbf{R}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{F}_n\right)^{-1},$$

és az utóbbi kifejezésben már unitér mátrixok szerepelnek.

8.10. *a)* Összevonás és kettéosztás:

$$\begin{aligned} &3x^2 - xy + 5yx + 5y^2 \\ &\quad = 3x^2 + 4xy + 5y^2 && \text{összevonás} \\ &\quad = 3x^2 + 2xy + 2yx + 5y^2 && \text{kettéosztás} \\ &\quad = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Hasonlóképp

$$\begin{aligned} &xy + 6xz + yx + 4yz + 2zy \\ &\quad = 2xy + 6xz + 6yz && \text{összevonás} \\ &\quad = xy + 3xz + yx + 3yz + 3zx + 3zy && \text{kettéosztás} \\ &\quad = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Valós kvadratikus alak mátrixa mindig szimmetrikus.

8.11. A q kvadratikus forma mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

az áttérés mátrixa

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ezért

$$\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 17 \end{bmatrix}.$$

Így a kvadratikus alak a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = -4\xi^2 - 4\xi\eta + 17\eta^2.$$

8.12. *a)* Ekkor

$$3\bar{x}x + \mathrm{i}\bar{x}y + 6\mathrm{i}\bar{y}x + 5\bar{y}y = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ 6\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

b) Ekkor

$$2\bar{x}x + 2\mathrm{i}\bar{y}x - 2\mathrm{i}\bar{x}y + 6\bar{y}y = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

c) Első ránézésre csak az látszik, hogy a kifejezés valós értékű, de nem néz ki komplex kvadratikus alaknak. Viszont azonos átalakítással kvadratikus formává alakítható, ui.

$$\begin{aligned} 3|x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{x}y) + 4|y|^2 &= 3\bar{x}x + \overline{\mathrm{i}\bar{x}y} + \mathrm{i}\bar{x}y + 4\bar{y}y \\ &= 3\bar{x}x - \mathrm{i}\bar{y}x + \mathrm{i}\bar{x}y + 4\bar{y}y \\ &= \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Míg a valós kvadratikus alakok esetén a kvadratikus alakok és a szimmetrikus mátrixok között van kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, addig a komplex esetben a kvadratikus alakok és a négyzetes mátrixok között.

8.13. Legyen a $\mathcal{B}$ bázisban egy vektor koordinátás alakja (x, y), a standard $\mathcal{E}$ bázisban (ξ, η), az áttérés mátrixa $\mathbf{B}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$, azaz $(x, y) = \mathbf{B}(\xi, \eta)$. Az $x^2 + y^2 = 1$ alakja

$$1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}$ pozitív definit, így mindkét sajátértéke pozitív, tehát az ábra a standard bázisban ellipszis.

8.14. Ha $\mathbf{A} \succcurlyeq 0$ és $\mathbf{B} \succcurlyeq 0$, azaz bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$ és $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} \geqslant 0$, akkor

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} \geqslant 0,$$

tehát $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ is pozitív szemidefinit. Ebből az állítás természetes módon teljesül véges sok kvadratikus alakra, illetve szimmetrikus valós mátrixra. (Analóg állítás hasonlóan igazolható önadjungált komplex mátrixokra, illetve a hozzájuk tartozó kvadratikus alakokra is.) Ha viszont például $\mathbf{A} \succ 0$, azaz pozitív definit, azaz $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, akkor

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} > 0,$$

azaz $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pozitív definit.

8.15. Sylvester tétele szerint két valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor kongruens, ha azonos a tehetetlenségük.

a) Az első két mátrix spektruma $[1, 1, -1, -1]$, a harmadiké $[1, 1, 1, -1]$, így az első kettő kongruens, mert a tehetetlenségük $(n_+, n_-, n_0) = (2, 2, 0)$, de a harmadik nem kongruens velük, mert a tehetetlensége $(3, 1, 0)$.

b) Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix spektruma $[1, 1, 0, 0]$, így tehetetlensége

$$(n_+, n_-, n_0) = (2, 0, 2).$$

A szimultán $S_2 - S_1$, $O_2 - O_1$, $S_4 - S_3$, $O_4 - O_3$ sor-oszlopműveletek igazolják a következő kongruenciát:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

így ezek tehetetlensége

$$(n_+, n_-, n_0) = (2, 1, 1),$$

ami nem egyezik meg az előzővel. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha kiszámoljuk a

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit. A bal felső blokkból leolvasható hogy 1 és 0 két sajátérték. A bal alsó

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja $\chi(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$, annak gyökei $(1\pm\sqrt{5})/2$, és ezek egyike pozitív, másika negatív. Tehát a tehetetlenség $(n_+,n_-,n_0)=(2,1,1)$.

c) A

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

kongruenciák igazak, hisz az előzőkhöz hasonlóan mindegyik mátrixról leolvashatók a sajátértékei, és az mindhárom esetben 2 pozitív, egy negatív és egy zérust tartalmaz, azaz mindhárom mátrix tehetetlensége $(n_+,n_-,n_0)=(2,1,1)$.

8.16. Mindkettő indefinit.

a) A $q(x,y)=2x^2-6xy+3y^2$ kvadratikus alakra $q(1,0)=2>0$, $q(1,1)=-1<0$.

b) A $q(x,y,z)=2x^2+4xy+3y^2+4yz+z^2$ kvadratikus alakra $q(1,0,0)=2>0$, $q(1,-1,1)=-2<0$.

8.17. *a)* Hamis, *b)* igaz, *c)* igaz, *d)* igaz, *e)* igaz, *f)* igaz, *g)* igaz.

Ha egy szimmetrikus mátrix minden eleme pozitív, akkor negatív szemidefinit ugyan nem lehet, de indefinit igen, például az

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékei -1 és 3, így indefinit. A többi állítást a tanult tételek igazolják.

8.18. A karakterisztikus polinom gyökei a sajátértékek. A mátrix karakterisztikus polinomja

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}5-\lambda&1\\1&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-4).$$

aminek a gyökei $\lambda_1=6$, $\lambda_2=4$. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})=\operatorname{rref}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})$ vektorai azonosak az $x_1-x_2=0$ homogén egyenlet(rendszer) megoldásaival, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A}-6\mathbf{I})=\operatorname{span}((1,1))$. A másik sajátértékre

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=\operatorname{rref}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\operatorname{span}((1,-1))$.

A sajátpárok egységnyi sajátvektorokkal: $(6,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1))$, $(4,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1))$. Így az ortonormált bázis

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

E bázisban a kvadratikus forma kanonikus alakú: $6\xi^2+4\eta^2$. Mivel

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=-1,$$

így ha jobbsodrású bázist keresünk, akkor valamelyik vektort, például a másodikat -1-gyel be kell szoroznunk:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Akkor is 1-re változik a fenti determináns értéke, ha két oszlopát felcseréljük, ekkor azonban a diagonális alakban is fel kell cserélni a sajátértékeket, ezért a jobbsodrású ortonormált

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

bázis esetén $4\xi^2+6\eta^2$ a kanonikus alak.

A második kvadratikus alak mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{aligned}q(x,y,z)&=-4x^2+4xy-4xz+8yz-7z^2\\&=\begin{bmatrix}x&y&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&2&-2\\2&0&4\\-2&4&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|&=\begin{vmatrix}-4-\lambda&2&-2\\2&-\lambda&4\\-2&4&-7-\lambda\end{vmatrix}\\&=-\lambda^3-11\lambda^2-4\lambda-60\\&=(-10-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda),\end{aligned}$$

aminek a gyökei $\lambda_1=-10$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=2$. Eszerint ξ-, η-, ζ-val jelölve az új változókat $q(\xi,\eta,\zeta)=-10\xi^2-3\eta^2+2\zeta^2$. Egy ortonormált bázis

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2),\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1),\frac{1}{\sqrt{30}}(1,5,2)\right\}.$$

A bázisvektorok sorrendjének cseréje mellett a kanonikus alaknak $3!=6$ különböző alakja lehet, pl. $2\xi^2-10\eta^2-3\zeta^2$.

8.19. *a)* Mivel csak a hozzáadás műveletével és csak lejjebb lévő sorhoz adással eljuthatunk a háromszögalakhoz, szükségtelen a sorművelet után azonnal elvégezni az azonos oszlopműveletet is, a háromszögalakból leolvasható a diagonális mátrix és így a csak négyzetes tagokat tartalmazó alak is:

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&5&4\\2&4&7\end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-2S_1\\S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

Tehát egy lehetséges diagonális alak $\xi^2+\eta^2+3\zeta^2$. De minden olyan alak is jó a Sylvester-féle tehetetlenségi tétel szerint, melyben a pozitív együtthatók száma 3, zérus és negatív együttható pedig nincs. Ilyen például a $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ alak is. A kvadratikus alak pozitív definit.

b) A második kvadratikus alak mátrixából hasonlóképp csak a hozzáadás műveletével és csak lejjebb lévő sorhoz adással eljutunk a háromszögalakhoz:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&6\end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-2S_1\\S_3-3S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&2&-3\end{bmatrix} \overset{S_3-2S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&-7\end{bmatrix}.$$

A kvadratikus alak $\xi^2+\eta^2-7\zeta^2$, ami indefinit.

Az *a)*-beli kvadratikus alak definiálhat skalátszorzást, hisz pozitív definit, míg a *b)*-beli nem, mert indefinit.

8.20. *a)* Hiperbola, *b)* ellipszis, *c)* parabola.

a) Az $5x^2-12xy-24x+3$ kvadratikus alak, a lineáris tagok mátrixa és a konstans

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&-6\\-6&0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-24&0\end{bmatrix},\ C=3.$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja $\lambda^2-5\lambda-36$, sajátértékei $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-4$. A bázisvektorokból képzett ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix a hozzá tartozó diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixszal

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}-3&2\\2&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}9&0\\0&-4\end{bmatrix},$$

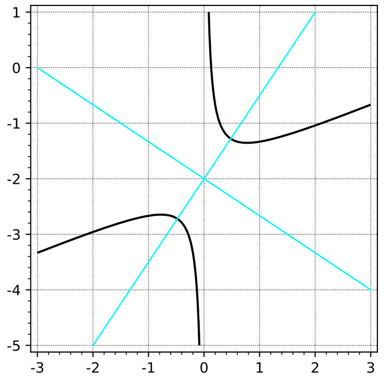
ahol $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{x}+C=\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}+\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y}+C$, és $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$. Kifejtve az $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}&9y_1^2-4y_2^2+\frac{72}{\sqrt{13}}y_1-\frac{48}{\sqrt{13}}y_2+3\\&=\left(3y_1+\frac{12}{\sqrt{13}}\right)^2-\left(2y_2+\frac{12}{\sqrt{13}}\right)^2+3.\end{aligned}$$

A középpont tehát a $3y_1+\frac{12}{\sqrt{13}}=0$ és a $2y_2+\frac{12}{\sqrt{13}}=0$ egyenletek megoldásából $\mathbf{y}_0=-\frac{1}{\sqrt{13}}(4,6)$, azaz

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{Q}\mathbf{y}_0=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}-3&2\\2&3\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}.$$

A tengelyek irányvektora megegyezik a sajátvektorokéval, így az egyenletük $y-(-2)=\frac{2}{-3}(x-0)$, azaz $y=-\frac{2}{3}x-2$, ill. $y-(-2)=\frac{3}{2}(x-0)$, azaz $y=\frac{2}{3}x-2$. Az alábbi ábra ezeket is mutatja.



b) A kvadratikus alak mátrixa

$$\begin{bmatrix}5&-4\\-4&5\end{bmatrix},$$

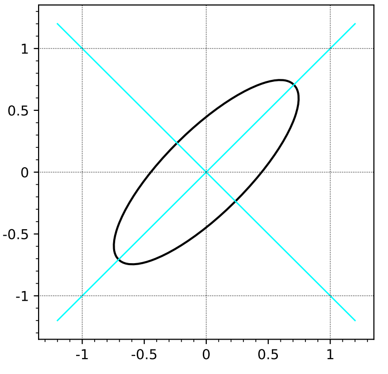
karakterisztikus polinomja $\chi(\lambda)=\lambda^2-10\lambda+9$, a sajátpárok $(9,(-1,1))$, $(1,(1,1))$. Ebből $\mathbf{Q}$-t 1 determinánsúnak választva

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}9&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Mindkét sajátérték pozitív, ezért ellipszist kapunk. Elvégezve az $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítést, a $9y_1^2+y_2^2=1$ egyenlet adódik, amiből leolvasható a két félnagytengely mérete, ui. átalakítva kapjuk, hogy

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{y_2^2}{1^2}=1,$$

azaz $\frac{1}{3}$ és 1 a két félnagytengely. A középpont az origó. Mivel a sajátvektorok adják meg a tengelyirányokat, ezért a tengelyek egyenlete $y=x$ és $y=-x$, így a görbe ábrája



c) Az $9x^2-6xy+y^2-14x+3y+3=0$ egyenletű kúpszelet másodfokú $9x^2-6xy+y^2$ részének mátrixa, a sajátvektorokból képzett ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix és a sajátértékek $\mathbf{\Lambda}$ mátrixa

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}9&-3\\-3&1\end{bmatrix},\ \mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3&1\\-1&3\end{bmatrix},\ \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}10&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

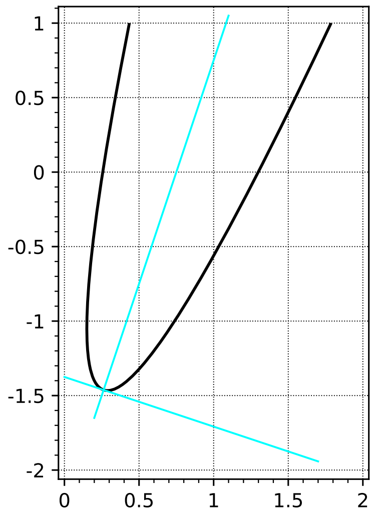
A $\mathbf{B} = [-14\ 3]$ mátrixszal $\mathbf{BQ} = -\frac{\sqrt{10}}{2}(9,1)$. Az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda y} + \mathbf{BQy} + C$ egyenlet alakja tehát

$$\begin{aligned} 10y_1^2 - \frac{9\sqrt{10}}{2}y_1 - \frac{\sqrt{10}}{2}y_2 + 3 \\ = \left(\sqrt{10}y_1 - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{10}}{2}y_2 - \frac{33}{16}, \end{aligned}$$

így a parabola csúcsa

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= (y_1, y_2) = \frac{1}{8\sqrt{10}}(18, -33), \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{Qy}_0 = \left(\frac{21}{80}, -\frac{117}{80}\right). \end{aligned}$$

A tengelyek egyenlete $y + \frac{117}{80} = -\frac{1}{3}(x - \frac{21}{80})$, azaz $y = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{8}$, valamint $y + \frac{117}{80} = 3(x - \frac{21}{80})$, azaz $y = 3x - \frac{9}{4}$.



8.21. *a)* Az első mátrix (jelölje $\mathbf{A}$) karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda, \end{aligned}$$

aminek a gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$. Mivel pozitív és 0 sajátértékei vannak, ezért $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit. Kanonikus alakja $q(\xi, \eta, \zeta) = 3\xi^2 + 3\eta^2$, ami sosem negatív, de a $(0,0,1) \neq \mathbf{0}$ vektorban értéke 0.

b) A második mátrix (jelölje $\mathbf{B}$) karakterisztikus polinomját is meghatározhatjuk ($-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda$), és abból a sajátértékeit, de egyszerűbb, ha észrevesszük, hogy e mátrix az *a)*-beli -1-szerese, azaz $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, így sajátértékei $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 0$, tehát e mátrix negatív szemidefinit, kanonikus alakja $-3\xi^2 - 3\eta^2$.

c) A harmadik mátrix (jelölje $\mathbf{C}$) karakterisztikus polinomját is meghatározhatjuk, és abból a sajátértékeit ($-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$), de sokkal egyszerűbb a megoldás, ha észrevesszük, hogy $\mathbf{C} = \mathbf{B} + 4\mathbf{I}$. $\mathbf{B}$ spektruma $\sigma(\mathbf{B}) = [-3, -3, 0]$, így $\mathbf{C}$ sajátértékei 4-gyel nagyobbak, azaz $\sigma(\mathbf{C}) = [1, 1, 4]$, tehát $\mathbf{C}$ pozitív definit. Ez a $\xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$ alakból is leolvasható, hisz ez mindig pozitív, ha $(\xi, \eta, \zeta) \neq \mathbf{0}$.

8.22. *a)* Az első mátrix sarok-aldeterminánsai

$$3, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Mivel minden sarok-aldeterminánsa (bal felső főminora) pozitív, ezért e mátrix pozitív definit.

b) A második mátrix sarok-aldeterminánsai

$$-2, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Mivel minden páratlan rendű sarok-aldetermináns (bal felső főminor) negatív, páros rendű sarok-aldetermináns pozitív, ezért e mátrix negatív definit.

c) A harmadik mátrix csak egyetlen elemében különbözik az előzőtől, de így determinánsának értéke 1, így a sarok-aldeterminánsok előjeleinek sorozata $- + +$, így a mátrix indefinit. Ez a definíció alapján is látható, pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 < 0,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

8.23. Négy négyzetgyök, melyek közül csak az első pozitív definit:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontása és pozitív szemidefinit négyzetgyöke

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

További négyzetgyökök kaphatók a diagonális mátrixok negatív „négyzetgyököt” is tartalmazó variánsaival:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

8.24. *a)* 1. megoldás az LU-felbontásból: Az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit, mert $\chi(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$, $\chi(0) = 4 > 0$, $\chi(1) = -1 < 0$, $\chi(2) = 4 > 0$, így minden gyöke pozitív. Az LU-felbontás

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&4&2\\0&0&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$\operatorname{diag}(1,4,1) = \operatorname{diag}(1,2,1)\operatorname{diag}(1,2,1)$ és az $\mathbf{R} = \operatorname{diag}(1,2,1)\mathbf{L}^\mathsf{T}$ választással

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&5&2\\0&2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}.$$

2. megoldás a 414. oldalon leírt algoritmussal:

$$\begin{aligned}&j=1: \ \mathbf{s} = \mathbf{A}_{1,1:3} = (1,1,0),\\ &\quad \mathbf{R}_{1,1:3} = \frac{1}{\sqrt{1}}(1,1,0) = (1,1,0)\\ &j=2: \ \mathbf{s} = \mathbf{A}_{2,2:3} = (5,2),\ \mathbf{s} = (5,2) - 1(1,0) = (4,2),\\ &\quad \mathbf{R}_{2,2:3} = \frac{1}{\sqrt{4}}(4,2) = (2,1)\\ &j=3: \ \mathbf{s} = (2),\ \mathbf{s} = (2) - 0\cdot(0) - 1\cdot(1) = (1),\\ &\quad \mathbf{R}_{3,3:3} = \frac{1}{\sqrt{1}}(1) = (1).\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&1&0\\&2&1\\&&1\end{bmatrix}.$$

b) Az LU-felbontás, az $\mathbf{U}$ főátlójából álló $\mathbf{D}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T}$, és végül az $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{L}^\mathsf{T}$ mátrixok

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&4&-4\\0&0&9\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(1,4,9), \quad \mathbf{D}^{1/2} = \operatorname{diag}(1,2,3),$$

$$\mathbf{R} = \operatorname{diag}(1,2,3)\mathbf{L}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}1&2&2\\0&2&-2\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&8&0\\2&0&17\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&2&-2\\0&0&3\end{bmatrix} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}.$$

2. megoldás a 414. oldalon leírt algoritmussal:

$$\begin{aligned}&j=1: \ \mathbf{s} = \mathbf{A}_{1,1:3} = (1,2,2),\\ &\quad \mathbf{R}_{1,1:3} = \frac{1}{\sqrt{1}}(1,2,2) = (1,2,2)\\ &j=2: \ \mathbf{s} = \mathbf{A}_{2,2:3} = (8,0),\ \mathbf{s} = (8,0) - 2(2,2) = (4,-4),\\ &\quad \mathbf{R}_{2,2:3} = \frac{1}{\sqrt{4}}(4,-4) = (2,-2)\\ &j=3: \ \mathbf{s} = (17),\ \mathbf{s} = (17) - 2\cdot(2) - (-2)\cdot(-2) = 9,\\ &\quad \mathbf{R}_{3,3:3} = \frac{1}{\sqrt{9}}9 = 3.\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&2&2\\&2&-2\\&&3\end{bmatrix}.$$

8.25. 1. Az első kettő és a negyedik tag vizsgálata segít elindulni.

$$\begin{aligned}&9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + 5 = 0 \quad \rightsquigarrow\\ &(3x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3})^2 + \frac{2}{9}(5x_2 - 10)^2 = 20.\end{aligned}$$

Az $y_1 = 3x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3}$, $y_2 = 5x_2 - 10$ transzformáció (egy lineáris leképezés és egy eltolás kompozíciója) után: $y_1^2 + \frac{2}{9}y_2^2 = 20$, ami ellipszis egyenlete.

2. Az első három taggal könnyen leválasztható egy teljes négyzet:

$$\begin{aligned}&4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_1 - 8x_2 = 3 \quad \rightsquigarrow\\ &(2x_1 - 3x_2)^2 + x_1 - 8x_2 = 3.\end{aligned}$$

Így az $y_1 = 2x_1 - 3x_2$, $y_2 = -x_1 + 8x_2$ lineáris helyettesítések után $y_1^2 - 3 = y_2$, ami parabola egyenlete.

3. Az első, második és negyedik tag alapján felírható az első teljes négyzet:

$$\begin{aligned}&x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 2x_1 + 10x_2 - 5 = 0 \quad \rightsquigarrow\\ &(x_1 + 3x_2 - 1)^2 - 4(2x_2 - 1)^2 = 2.\end{aligned}$$

Ez egy $y_1^2 - 4y_2^2 = 2$ alakú hiperbola egyenlete.

8.26. 1. megoldás: Mivel $\mathbf{A} \succcurlyeq 0$, azaz PD, ezért van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$. Így $\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{C})^2$. Az Hadamard-egyenlőtlenség (ld. a (7.18) egyenlőtlenséget a 7.69. feladatban) szerint

$$|\det \mathbf{C}| \le \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{c}_i\|.$$

Mivel $a_{ii} = \mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{c}_i = \|\mathbf{c}_i\|^2$, ezért

$$\det \mathbf{A} = |\det \mathbf{C}|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{c}_i\|^2 = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2. megoldás: Mivel $\mathbf{A} \succcurlyeq 0$, ezért főátlóbeli elemei – mint az 1×1-es főminorai – is pozitívak. Legyen a $\mathbf{D}$ diagonális mátrixban $d_{ii} = 1/\sqrt{a_{ii}}$. Ekkor a

$$\mathbf{B} = \mathbf{DAD}$$

mátrix szimmetrikus, pozitív definit, hisz $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{DADx} = (\mathbf{Dx})^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{Dx}) > 0,$$

és főátlójában minden elem 1. Ekkor

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D}^2 = \frac{\det \mathbf{A}}{\prod_i a_{ii}},$$

így elég igazolnunk, hogy $\det \mathbf{B} \leqslant 1$. Legyen $\mathbf{B}$ spektruma $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Mivel $\mathbf{B} \succcurlyeq 0$, ezért a $\lambda_i > 0$ számokra alkalmazható a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség:

$$\prod_i \lambda_i \leqslant \left(\sum_i \frac{\lambda_i}{n}\right)^n,$$

azaz

$$\det \mathbf{B} \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr} \mathbf{B}}{n}\right)^n = 1,$$

hisz $\operatorname{tr} \mathbf{B} = n$.

8.27. Indirekt módon tegyük fel, hogy vannak olyan $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$ mátrixok, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^2$. Eszerint $\mathbf{B} - \mathbf{C} \neq \mathbf{O}$ szimmetrikus, így *van nemzérus* λ sajátértéke és hozzá egy $\mathbf{x}$ sajátvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{C}^2)\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}[\mathbf{B}(\mathbf{B}-\mathbf{C}) + (\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{C}]\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}(\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{C}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{C}\mathbf{x} \\ &= \lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{C}\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is pozitív szemidefinit, ezért ez csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$, így

$$0 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} \neq 0,$$

ami ellentmondás, hisz $\lambda \neq 0$ és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

8.28. $F(50) = 7$, $F(1000) = 1019$.

8.29. A $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{y}$ (komplex bilineáris vagy más néven szeszkvilineáris) függvényt egyértelműen megadja az $\mathbf{A}$ mátrix, hisz $\mathbf{e}_i^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{e}_j = a_{ij}$. Ezért elég megmutatni, hogy a b függvény kifejezhető a q függvénnyel, ahol $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

$$b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = b(\mathbf{x},\mathbf{x}) + b(\mathbf{y},\mathbf{y}) + b(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{y},\mathbf{x})$$
$$b(\mathbf{x}+\mathrm{i}\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathrm{i}\mathbf{y}) = b(\mathbf{x},\mathbf{x}) + b(\mathbf{y},\mathbf{y}) + \mathrm{i}b(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathrm{i}b(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

Ezekből a $b(\mathbf{x},\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$ helyettesítésekkel

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = &\frac{1}{2}\left(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\right) \\ &- \frac{\mathrm{i}}{2}\left(q(\mathbf{x}+\mathrm{i}\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\right). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy különböző mátrixokhoz különböző q kvadratikus alak tartozik.

8.30. Ha $\mathbf{A}$ önadjungált, akkor a kvadratikus alak értéke valós, ui.

$$(\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{H} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x},$$

azaz $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$ értéke egyenlő a konjugáltjával, ami csak valósokra áll fenn. Megfordítva, legyen a kvadratikus alak értéke mindig valós, akkor az megegyezik konjugáltjával, így $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{H} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{x}$. De az egyenlőség két oldalán egy-egy kvadratikus alak van, melyek egyenlőek, így mátrixuknak is egyenlőnek kell lenniük az előző 8.29. feladat szerint, így $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{H}$, tehát $\mathbf{A}$ önadjungált.

8.31. Ha valamelyik B_i halmaz mérete λ, azaz $|B_i| = \lambda$, akkor minden B_j halmazra $B_i \subset B_j$ $(i \neq j)$, és e halmazok B_i-n kívüli részei diszjunktak. Így $n - \lambda \geqslant m - 1$, azaz

$$m \leqslant n - \lambda + 1 \leqslant n.$$

Ezután feltehetjük, hogy a $b_i = |B_i| - \lambda$ számok pozitívak. Legyen $\mathbf{M}$ a feladat útmutatójában megadott illeszkedési mátrix, azaz $m_{ij} = 1$, ha $i \in B_j$, egyébként $m_{ij} = 0$. Ekkor a halmazokra kirótt feltételek szerint

$$\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M} = \lambda\mathbf{1}_{m\times m} + \mathbf{B}, \quad \text{ahol } \mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_m).$$

Megmutatjuk, hogy $m = \mathrm{r}(\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{M}) \leqslant n$. Ehhez a mátrixok jellegét vizsgáljuk. $\mathbf{B}$ nyilván pozitív definit, hisz sajátértékei a pozitív b_i számok. A $\lambda\mathbf{1}_{m\times m}$ mátrix pozitív szemidefinit, hisz bármely $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ vektorra

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\lambda\mathbf{1}_{m\times m}\mathbf{x} = \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2 \geqslant 0.$$

Egy pozitív definit és egy pozitív szemidefinit mátrix összege viszont pozitív definit (ld. a 8.14. feladatot), így $\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}$ pozitív definit, tehát $\mathrm{r}(\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}) = m$. Másrészt $\mathrm{r}(\mathbf{M}) \leqslant n$, hisz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. QED

8.32. Az *a)* állítás a *b)* speciális esete, ezért elég a *b)* állítást igazolni. Tekintsük a szimmetrikus $\mathbf{A} \in \mathbb{F}_2^{n\times n}$ mátrixot, és legyen $\mathbf{b} = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ a főátlóbeli elemek vektora. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$ vektorra

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} x_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i a_{ii} x_i + \left(\sum_{i<j} x_i a_{ij} x_j + x_j a_{ji} x_i\right) \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0, \\ &= \sum_{i=1}^n x_i a_{ii} x_i \qquad\qquad x_i^2 = x_i, (x_i \in \mathbb{F}_2), \\ &= \sum_{i=1}^n x_i a_{ii} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

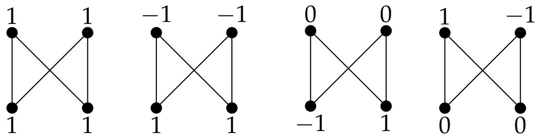
Eszerint ha $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, akkor $\mathbf{x} \perp \mathbf{b}$, tehát $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$, azaz az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer konzisztens. (Véges testek fölött a lineáris algebra alaptételének az az állítása nem igaz, hogy a sortér és a nulltér direkt összege a teljes tér, de a merőlegességük igaz, és itt csak azt használtuk.)

A *b)* kérdés a játék nyelvén úgy szól, hogy lekapcsolható-e minden lámpa, ha kezdetben pontosan azok a lámpák égnek, melyeket megnyomva nem csak a szomszédaik, de saját maguk is megváltoztatják az állapotukat. A válasz: igen.

8.33. A $K_{2,2} = C_4$ gráf szomszédsági mátrixa, ha az élek az $(i, i+1)$ csúcspárt kötik össze (az csúcsok $0, 1, 2, 3$, és $i+1$ modulo 4 értendő):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A négy sajátpár a következő ábrákról leolvasható:



Nevezetesen ezek az ábrák sorrendjének megfelelően, a koordinátákat a bal alsó sarokból indítva:

$$(2, (1, 1, 1, 1)), \quad (-2, (1, -1, 1, -1)),$$
$$(0, (-1, 0, 1, 0)), \quad (0, (0, -1, 0, 1)).$$

8.34. Ha az egyszerű G gráf $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixának $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpárja, akkor $\mathbf{A}^m$-nak $(\lambda^m, \mathbf{x})$. Így

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}^m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m.$$

Az $[\mathbf{A}^m]_{ij}$ az i-ből j-be vezető m hosszú utak száma. A főátlóban lévő $[\mathbf{A}^m]_{ii}$ tehát az m hosszú, az i csúcson áthaladó körutak száma. Így $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^m)$ az összes m hosszú körök száma.

8.35. Ha G páros gráf, és csúcsait úgy sorszámozzuk, hogy az első m csúcsból vezetnek élek a következő n csúcsba, akkor a szomszédsági mátrix alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Ha $(\lambda, [\begin{smallmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{smallmatrix}])$ egy sajátpár, azaz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

akkor $\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ és $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$, így

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{y} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda\mathbf{x} \\ \lambda\mathbf{y} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix},$$

tehát $(-\lambda, [\begin{smallmatrix}\mathbf{x}\\ -\mathbf{y}\end{smallmatrix}])$ egy sajátpár. Világos, hogy λ független sajátvektoraiból a fenti módon kapott vektorok $-\lambda$ független sajátvektorai lesznek, így λ és $-\lambda$ geometriai multiplicitása azonos, és szimmetrikus mátrixról lévén szó, ez azonos az algebrai multiplicitással.

Fordítva, legyenek az egyszerű G gráf szomszédsági mátrixának sajátértékei $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-2} \geqslant \lambda_{n-1}$. Tegyük fel, hogy ezek szimmetrikusak az origóra, azaz minden i-re $\lambda_i = -\lambda_{n-i}$. Ekkor bármely pozitív páratlan k egészre

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}^k) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^k = 0.$$

Az első egyenlőséget a 8.34. feladatban igazoltuk, a második a sajátértékek origóra való szimmetriájából következik. Mivel $\mathbf{A}^k$ minden eleme nemnegatív, hisz a k hosszú séták számát adják meg az elemei, így a főátlóban minden elem 0, azaz a gráfban nincs páratlan kör. Tehát G páros gráf.

8.36. *a)* Az $\mathbf{M}$ mátrix i-edik sorát jelölje az $\mathbf{m}_i^\mathsf{T}$ sorvektor, melynek k-adik koordinátája 1, ha a k-adik él illeszkedik az i csúcsra. Így $\mathbf{m}_i^\mathsf{T}\mathbf{m}_i = d_i$, az i csúcs foka. Az $\mathbf{m}_i^\mathsf{T}\mathbf{m}_j = 1$ $(i \neq j)$ ha i és j szomszédos csúcsok, egyébként 0. Így $\mathbf{M}\mathbf{M}^\mathsf{T} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_v) + \mathbf{A}$.

b) Az $\mathbf{L} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_v) - \mathbf{A}$ összefüggés azonnal következik az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{A}$ definíciójából.

8.37. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^v$, ahol $v = |V|$ a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak száma, és tekintsük a $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{L}\mathbf{x}$ kvadratikus alakot. Mivel $\mathbf{L}$ minden sorában (és oszlopában) 0 az elemek összege, ezért

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{L}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{v} d_i x_i^2 - 2\sum_{ij \in E} x_i x_j = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \geqslant 0,$$

így $\mathbf{L}$ pozitív szemidefinit. Mivel $\mathbf{L}$ minden sorában 0 az elemek összege, ezért $\mathbf{L}\mathbf{1} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{1}$, azaz a $(0, \mathbf{1})$ egy sajátpár. Kérdés, mennyi a multiplicitása?

Tegyük fel, hogy G egyetlen komponensből áll, azaz bármely két csúcs között vezet út. Legyen $(0, \mathbf{x})$ egy sajátpár, azaz $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{L}\mathbf{x} = 0$. Ekkor

$$0 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{L}\mathbf{x} = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2,$$

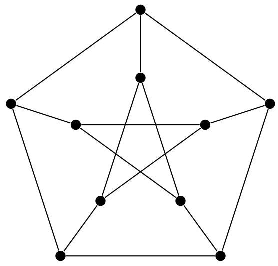
azaz $x_i = x_j$, ha $ij \in E$. Mivel bármely két i és j csúcs között vezet út, az ezekhez tartozó csúcsokra az x_i értékek azonosak, így $\mathbf{x} = c \cdot \mathbf{1}$, azaz a sajátaltér 1 dimenziós, így a 0 algebrai multiplicitása is 1, hisz $\mathbf{L}$ diagonalizálható, mivel szimmetrikus.

Tegyük fel, hogy $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ a csúcshalmaz k (diszjunkt) komponensre való felbontása. Tegyük fel, hogy i és j ugyanabba a V_s komponensbe esik, és $(0, \mathbf{x})$ egy sajátpár. Ekkor az előző gondolatot megismételve $x_i = x_j$. (Ha i és j különböző komponensbe esnek, akkor nincs köztük út, így x_i és x_j értéke lehet különböző.) Így minden sajátvektor lineáris kombinációja a V_s halmazok karakterisztikus vektorainak. Nevezetesen legyen $\mathbf{x}_s$ az a vektor, melyre

$$[\mathbf{x}_s]_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in V_s, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez k lineárisan független vektor, melyek kifeszítik a 0-hoz tartozó sajátalteret. Így a 0 algebrai és egyúttal geometriai multiplicitása azonos a komponensek számával.

8.38. A Petersen-gráf többféleképp definiálható: (1) a teljes 5 csúcsú K_5 gráf élgráfjának komplementere, azaz a P Petersen-gráf csúcsai a K_5 gráf élei, és két P-beli csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha a nekik megfelelő K_5-beli éleknek nincs közös csúcsuk, (2) egy dodekaéder szemközti csúcsait és éleit azonosítjuk. Így egy 10 csúcsú, 15 élű gráfot kapunk:



E P gráfról a következőket állapíthatjuk meg:
1. minden csúcs foka 3, azaz e gráf 3-reguláris,
2. a legkisebb kör mérete 5, azaz P bősége 5,
3. bármely két különböző csúcs vagy össze van kötve, vagy van köztük egyetlen 2 hosszú út.

Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ szomszédsági mátrix négyzetére

$$[\mathbf{A}^2]_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } a_{ij} = 0, \\ 0, & \text{ha } a_{ij} = 1. \end{cases}$$

A fentiekből egyrészt következik, hogy $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{1}_{10\times 10} + 2\mathbf{I}$ (ahogy azt már beláttuk a 3.55. feladatban). Másrészt $(3, \mathbf{1})$ sajátpárja az $\mathbf{A}$-nak, és $(10, \mathbf{1})$ sajátpárja az $\mathbf{1}_{10\times 10}$-nek, és a 10 egyszeres, míg a 0 sajátérték 9-szeres multiplicitású. Így a 12 az $\mathbf{1}_{10\times 10} + 2\mathbf{I}$ egyszeres multiplicitású sajátértéke, egyúttal az $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}$-nak is. Eszerint a 3 az $\mathbf{A}$-nak egyszeres multiplicitású sajátértéke, és $\operatorname{span}(\mathbf{1})$ a sajátaltér. Itt minden mátrix szimmetrikus, így a sajátalterek merőlegesek egymásra. Az $\mathbf{1}_{10\times 10} + 2\mathbf{I}$ többi sajátértéke 2, így az $\mathbf{A}$ bármely $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpárjára, ahol $\mathbf{x} \perp \mathbf{1}$ igaz, hogy

$$\lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} = (\mathbf{A}^2 + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{1}_{10\times 10}\mathbf{x} + 2\mathbf{I}\mathbf{x} = 2\mathbf{x},$$

azaz $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Így $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = 1$ lehet még sajátérték. Ha a -2 multiplicitása s, az 1 multiplicitása t, akkor $s + t = 9$, és mivel $\operatorname{tr}\mathbf{A} = 0$, ezért a sajátértékek összege is 0, azaz $3 - 2s + t = 0$. Ebből $s = 4$, $t = 5$, azaz $\sigma(\mathbf{A}) = [-2, -2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1, 3]$.

8.39. *a)* Ha σ szinguláris értéke $\mathbf{A}$-nak, akkor σ^2 *sajátértéke az* $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ *mátrixnak*. Ha $\mathbf{A}$ téglalap alakú, $\mathbf{A}^2$ nincs is értelmezve.

b) Szükséges, hogy az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ térbe eső bázisvektorok az $OT(\mathbf{A}^\mathsf{H})$-beli bázisvektorok $\mathbf{A}$ általi *képeinek pozitív konstansszorosai* legyenek.

c) *Pozitív szemidefinit* önadjungált mátrix sajátértékei megegyeznek szinguláris értékeivel.

d) Normális mátrix sajátértékeinek *abszolút értékei* megegyeznek szinguláris értékeivel.

e) Az $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ mátrix *egyetlen pozitív szemidefinit* négyzetgyöke megegyezik az $\mathbf{A}$ móduszával.

8.40. Az $\mathbf{1}_{n\times n}$ mátrix rangja 1, így csak egy nemnulla szinguláris értéke van. Mivel e mátrix pozitív szemidefinit, ezért szinguláris értékei azonosak a sajátértékeivel. Az $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ vektor sajátvektor, melynek $\mathbf{1}_{n\times n}\mathbf{1} = (n, n, \dots, n)$ a képe, így n a legnagyobb sajátérték, és 0 az összes többi, tehát $\sigma_1 = n, \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 0$. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$, $\mathbf{1}_{n\times n}\mathbf{v}_1 = \sqrt{n}\mathbf{1} = \sigma_1\mathbf{u}_1$, így $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$. Ebből a redukált szinguláris felbontás

$$\mathbf{1}_{n\times n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}[n]\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}^\mathsf{T}.$$

Mivel az $\mathbf{1}_{n\times n}$ mátrix pozitív szemidefinit, ezért módusza megegyezik vele, azaz $|\mathbf{1}_{n\times n}| = \mathbf{1}_{n\times n}$.

8.41. *a)* A szinguláris értékek az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékeinek gyökei. Mivel

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$$

melynek karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 16 \\ &= (8-\lambda)(2-\lambda), \end{aligned}$$

így a sajátértékek $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = 2$. Ezután meghatározzuk a sajátaltereket. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 8\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 8\mathbf{I})$ sajátalteret megkapjuk az $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 8\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz az $x_1 + x_2 = 0$ egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = 8$-hoz tartozó sajátaltér tehát $\operatorname{span}((-1, 1))$. Hasonlóan számolva, mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért az $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ sajátalteret megkapjuk az $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 8\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz az $x_1 - x_2 = 0$ egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = 2$-höz tartozó sajátaltér tehát $\operatorname{span}((1, 1))$.

Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix egységnyi sajátvektorai automatikusan ortonormált rendszert adnak, mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátalterei 1 dimenziósak, és merőlegesek egymásra. Mindkét egységnyi sajátvektorra két-két választási lehetőség van, a $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ választással

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{\Sigma}$ mátrix a szinguláris értékeket tartalmazza, melyek az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékeinek négyzetgyökei:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Ezután meghatározzuk az $\mathbf{u}_i$ vektorokat. Az $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ képletekből:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Innen

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixnak így a következő szinguláris érték szerinti $\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ felbontását kaptuk:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen a pszeudoinverz

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac14 & \frac12 \\ -\frac14 & \frac12 \end{bmatrix}.$$

Az $|\mathbf{A}^\mathsf{T}|\mathbf{Q} = (\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{T})(\mathbf{UV}^\mathsf{T})$, $\mathbf{Q}|\mathbf{A}| = (\mathbf{UV}^\mathsf{T})(\mathbf{V\Sigma V}^\mathsf{T})$ polárfelbontások egyike fejben is kiszámolható:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

b) Az

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinomja $(40-\lambda)(10-\lambda)$, sajátpárjai $(40, (1,1))$, $(10, (-1,1))$, ezért

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{40} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ képletekből:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E vektorok adják az $\mathbf{U}$ mátrixot:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A polárfelbontásban szereplő pozitív szemidefinit mátrixok

$$|\mathbf{A}^\mathsf{T}| = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

és hasonlóképpen

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{V\Sigma V}^\mathsf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{Q}$ mátrixot megadó formulába helyettesítve

$$\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^\mathsf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Valóban, $\mathbf{A} = |\mathbf{A}^\mathsf{T}|\mathbf{Q} = \mathbf{Q}|\mathbf{A}|$, ui.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{5}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Szimmetrikus mátrix szinguláris felbontását az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékei és sajátvektorai helyett az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából is meg tudjuk határozni! Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda),$$

így sajátértékei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$. Az $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldása a $\lambda_1 = 3$ sajátértékre:

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},$$

amelynek megoldása

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Így $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. A $\lambda_2 = -1$ sajátérték esetén

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

amelynek megoldása

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Így $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus, ezért sajátalterei merőlegesek egymásra. Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^\mathsf{T}$, ahol

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ pozitív definit lenne, e felbontás egyúttal szinguláris felbontás is lenne, de itt az egyik sajátérték negatív, mely így nem lehet szinguláris érték. Ha a $\mathbf{\Lambda}$ második sorát -1-gyel szorozzuk (mert a főátlóban csak nemnegatív számok szerepelhetnek), akkor az előtte álló $\mathbf{V}$ mátrix második oszlopának -1-gyel való szorzása után a szorzatuk nem változik. Ezt igazolja az elemi mátrixokkal való alábbi egyszerű manipuláció:

$$\mathbf{U\Lambda} = \mathbf{UI\Lambda} = \mathbf{U}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{\Lambda}.$$

Így színessel jelölve a fenti elemi mátrixokkal való szorzások hatását:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{V\Lambda V}^\mathsf{T}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T},\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\\ \mathbf{U} &= \mathbf{V}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\\ \mathbf{\Sigma} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{\Lambda}.\end{aligned}$$

Innen

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

A polárfelbontások a képletekkel is kiszámolhatók, de rájöhetünk számolás nélkül is. Az $\mathbf{A}$ pozitív definitté válik, ha kicseréljük két sorát vagy oszlopát, így

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Szimmetrikus mátrix esetén $|\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{A}|$ nyilván fennáll.

d) Az *a)* eredményét felhasználva azonnal adódnak, a szinguláris felbontás mátrixai:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\\ \mathbf{\Sigma} &= \begin{bmatrix}2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0\end{bmatrix},\\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{10}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

e) Bár az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

mátrixnak meghatároztuk egy sajátfelbontását a 8.9. példában, így meg van a lehetőség az egyszerűbb megoldás lehetőségének ebből kiindulva, de itt mégis az általános megközelítést javasoljuk, ui. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = 9\mathbf{I}$, amit akár ránézésre is észrevehetünk, hisz az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai merőlegesek egymásra és a hosszuk 3. Így az $\frac{1}{3}\mathbf{A}$ ortogonális mátrix, tehát az $\mathbf{U} = \frac{1}{3}\mathbf{A}$, $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, $\mathbf{\Sigma} = 3\mathbf{I}$ választással

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)(3\mathbf{I})\mathbf{I}$$

egy szinguláris felbontás! Innen a pszeudoinverz $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{I}\frac{1}{3}\mathbf{I}\frac{1}{3}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\mathbf{A}$. A polárfelbontások is azonnal adódnak:

$$\mathbf{A} = (3\mathbf{I})\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right) = \left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)(3\mathbf{I}),$$

hisz $3\mathbf{I}$ pozitív definit, $\frac{1}{3}\mathbf{A}$ pedig ortogonális.

Csak a teljesség kedvéért megmutatjuk, hogy menne a megoldás a sajátfelbontásból kiindulva. A 8.9. példában meghatározott sajátfelbontás az ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^\mathsf{T}$, ahol

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Ezekből megkaphatók egy szinguláris felbontás mátrixai, nevezetesen $\mathbf{\Sigma} = 3\mathbf{I}$, $\mathbf{V} = \mathbf{Q}$, valamint $\mathbf{U}$ a $\mathbf{Q}$ első oszlopának, $\mathbf{\Sigma}$ a $\mathbf{\Lambda}$ első sorának -1-gyel való beszorzásával:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

E feladat tanulsága, hogy egy ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix szinguláris felbontása $\mathbf{Q} = \mathbf{QII}$.

f) Mivel

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}8 & 4 & -8\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 1\\ 4 & 2\\ -8 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}144 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix},$$

így azonnal adódik, hogy

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ képletekből ($i = 1, 2$) megkapható $\mathbf{U}_2$:

$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

majd az $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ választással

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

így ezekkel a redukált és a teljes SVD is felírható. Ebből pedig

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_2\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{U}_2^\mathsf{T} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

g) Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix},$$

így $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, és

$$\mathbf{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{I}_2.$$

Az $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ képletekből ($i = 1, 2$) megkapható $\mathbf{U}_2$ és az $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ vektort is hozzávéve $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

h) E feladatban az $\mathbb{R}^{m\times n}$-beli mátrixban $m = 2 < n = 3$, így érdemes lehet az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ helyett az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixszot kiszámolni, hisz az csak 2×2-es.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix},$$

melynek karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 22\lambda + 120$, így a sajátpárjai $(12, (1, 1))$ és $(10, (-1, 1))$, a szinguláris értékei $\sigma_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sigma_2 = \sqrt{10}$. Mivel fordított sorrendben szoroztuk össze az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixokat, itt nem a $\mathbf{v}_i$, hanem az $\mathbf{u}_i$ vektorokat kaptuk meg sajátvektorokként, azaz $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. Tehát

$$\mathbf{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen a $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i$ képletekből ($i = 1, 2$) megkapható $\mathbf{V}_2$ és az $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektort is hozzávéve $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, -2, 5),$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

E mátrixokból felírható az $\mathbf{A}$ redukált és teljes szinguláris felbontása, és pszeudoinverze is:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_2\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{U}^\mathsf{T} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 17 & -7 \\ 4 & 16 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

i) Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ összefüggés azt mutatja, hogy az $\mathbf{A}$ ortogonális mátrix, így az *e)* feladathoz hasonlóan azonnal felírható a szinguláris felbontása és a pszeudoinverze is minden számolás nélkül:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{I}^\mathsf{T}, \quad (\mathbf{U} = \mathbf{A},\ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{I},\ \mathbf{V} = \mathbf{I}), \\
\mathbf{A}^+ &= \mathbf{I}\mathbf{I}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

j) A $\mathbf{N}$ mátrix rangja $n - 1$, így csak egy szinguláris értéke 0, a többi pozitív. Az $\mathbf{N}$ mátrix egyetlen permutálómátrixszal való szorzással diagonális alakra hozható, ami egyúttal a szinguláris felbontáshoz is ötletet ad:

$$\mathbf{N} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T} = \mathbf{I}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát a szinguláris értékek $1, 1, \ldots, 1, 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, és $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ egy permutálómátrix, mely $\mathbf{N}$-ből egyetlen elem megváltoztatásával adódik, amit színessel kiemeltünk. A szinguláris felbontás ismeretében a pszeudoinverz is megkapható:

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

Meg tudunk-e általános érvényű állítást fogalmazni arról, hogy egy mátrix pszeudoinverze mikor egyezik meg a transzponáltjával?

8.42. *a)* Az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris értékeinek meghatározásához az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ vagy az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sajátértékeire van szükségünk. A *b)* és az *c)* kérdésben is az $\mathbf{u}_1$ vektort használjuk, ezért érdemes inkább az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixszal számolni:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 29 & 4 & 12 \\ 4 & 8 & 6 \\ 12 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Karakterisztikus polinomja gyökeinek kiszámolásához a racionálisgyök-tételt használhatjuk, szerencsére az 1 gyök, így a Horner-elrendezéssel megkapjuk a másik két gyököt kiadó másodfokú egyenletet:

$$\begin{vmatrix} 29-\lambda & 4 & 12 \\ 4 & 8-\lambda & 6 \\ 12 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 46\lambda^2 - 369\lambda + 324$$
$$= (36-\lambda)(9-\lambda)(1-\lambda).$$

Tehát a szinguláris értékek $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$. Az egységkör képe ellipszoid, melynek az origótól legtávolabbi pontjának az origótól való távolsága σ_1, azaz

$$\max_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \sigma_1 = 6.$$

b) Az egységgömb képének, azaz az

$$E = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

ellipszoidnak az origótól két pontja van legtávolabb, a $\sigma_1\mathbf{u}_1$ és a $-\sigma_1\mathbf{u}_1$ vektorok végpontja. Ezek meghatározásához az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrix $\lambda_1 = \sigma_1^2 = 36$ sajátértékhez tartozó σ_1 hosszúságú sajátvektorait kell kiszámítani. A sajáltér, azaz az $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} - 36\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ összes megoldása a

$$\operatorname{rref} \begin{bmatrix} -7 & 4 & 12 \\ 4 & -28 & 6 \\ 12 & 6 & -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

alapján $(4, 1, 2)t$, ahol t tetszőleges valós szám. Ebből $\mathbf{u}_1$ kiválasztására két lehetőségünk van:

$$\mathbf{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1, 2).$$

A két keresett vektor

$$\pm\sigma_1\mathbf{u}_1 = \pm 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1, 2) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}(4, 1, 2).$$

c) Az $\mathbf{u}_1$ vektor által kifeszített tér merőlegese megegyezik az $\mathbf{u}_2$ és $\mathbf{u}_3$ által kifeszített térrel, azaz

$$\operatorname{span}(\mathbf{u}_1)^\perp = \operatorname{span}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Az egységgömb képeként kapott ellipszoidnak e síkkal való metszete egy olyan ellipszis, amely félnagytengelyeinek hossza σ_2 és σ_3. Az ellipszis területe tehát $\sigma_2\sigma_3\pi = 3\pi$.

8.43. A feladat az $\mathbf{A}$ polárfelbontását kéri geometriai nyelven.

Polárfelbontás fejben: Keressük az $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ felbontást, ahol $\mathbf{P}$ pozitív szemidefinit, $\mathbf{Q}$ ortogonális. Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus lenne, ha az első oszlopát -1-gyel szoroznánk, de az így kapott mátrix determinánsa negatív, így a mátrix nem pozitív definit, de azzá válik, ha két oszlopát kicseréljük. Mindez egyetlen mátrixszorzással megvalósítható:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ami valóban egy pozitív definit (mivel vezető főminorai 2, 3 pozitívak), és egy ortogonális mátrix szorzata. Utóbbi (azaz az $\mathbf{i} \mapsto -\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{i}$) egy $-\pi/2$-vel, azaz $-90°$-kal való forgatás mátrixa. A $\mathbf{P} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ karakterisztikus polinomja

$$\chi_\mathbf{P}(\lambda) = \det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)^2 - 1$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (3-\lambda)(1-\lambda).$$

A sajátalterek $(3, (1, 1))$ és $(1, (1, -1))$. Tehát $\mathbf{A}$ megvalósítható egy $-\pi/2$ radiánnal való forgatással, majd a képvektor $(1, 1)$ irányú összetevőjének 3-szorosra nyújtásával és a rá merőleges összetevő megtartásával.

2. *Polárfelbontás az SVD-ből:*

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 1$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.44. Azonnal következik a Courant – Fischer – Weyl min-max tételéből (ld. 8.8. feladat), ha azt az $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, ui.

$$\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2,$$

és $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ sajátértékei a szinguláris értékek négyzetei.

8.45. A 7.53.-beli feladatok megoldhatók a redukált vagy a teljes szinguláris felbontás alkalmazásával. Egyszerűbb a redukált felbontással számolni.

a) Először ellenőrizzük, hogy $(\mathbf{\Sigma}^+)^\mathsf{T} = (\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T})^+$, ahol $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}_{m\times n}$ és $\mathbf{\Sigma}_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.

$$(\mathbf{\Sigma}^+)^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_r} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = (\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T})^+,$$

hisz $\mathbf{\Sigma}^+$ és $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}$ is $n \times m$-es, így a végeredmény mindkét esetben $m \times n$-es, és a $\mathbf{\Sigma}_r^{-1}$ blokk lesz mindkét esetben a bal felső sarokban, egyebütt pedig nullák. Így

$$(\mathbf{A}^+)^\mathsf{T} = (\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^+)^\mathsf{T} = \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{V}_r^\mathsf{T},$$
$$(\mathbf{A}^\mathsf{T})^+ = (\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}_r^+)^+ = \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{V}_r^\mathsf{T},$$

és ezek egyenlőek.

b) Kihasználjuk, hogy $\mathbf{U}_r^\mathsf{T}\mathbf{U}_r = \mathbf{V}_r^\mathsf{T}\mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$ és $\mathbf{\Sigma}_r^\mathsf{T} = \mathbf{\Sigma}_r$.

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}_r^\mathsf{T}\mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^\mathsf{T}\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^\mathsf{T}\mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^\mathsf{T}\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}_r^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

c) Az előzőhöz hasonló behelyettesítésekkel

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^+ = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}_r^\mathsf{T}\mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-2}\mathbf{U}_r^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+,$$
$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^+\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-2}\mathbf{V}_r^\mathsf{T}\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}_r^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+.$$

d) Felhasználva az *a)* részletszámításait is:

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^+ = (\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{U}_r^\mathsf{T}\mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^\mathsf{T})^+ = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-2}\mathbf{V}_r^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{A}^+(\mathbf{A}^\mathsf{T})^+ = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^\mathsf{T}\mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{V}_r^\mathsf{T} = \mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-2}\mathbf{V}_r^\mathsf{T}.$$

e) Az előzőhöz hasonlóan.

8.46. A redukált SVD-k Kronecker-szorzata a mátrixok Kronecker-szorzatának redukált szinguláris felbontását adja egy megfelelő sor-/oszlopcsere után.

Kihasználjuk, hogy általában $(\mathbf{A}\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C}\mathbf{D}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$, hogy négyzetes diagonális mátrixok Kronecker-szorzata négyzetes diagonális mátrix, és hogy szemiortogonális mátrixok Kronecker-szorzata szemiortogonális (gondoljuk meg ezeket!). Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ redukált szinguláris felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U}_a\mathbf{\Sigma}_a\mathbf{V}_a^\mathsf{T}$, $\mathbf{B} = \mathbf{U}_b\mathbf{\Sigma}_b\mathbf{V}_a^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{\Sigma}_a = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_a)$, $\mathbf{\Sigma}_b = \operatorname{diag}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_b)$, valamint $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{U}_b$ és $\mathbf{V}_b$ szemiortogonális mátrixok (de nem jelölnek azonos mátrixokat, ha az $a = \mathrm{r}(\mathbf{A})$ és $b = \mathrm{r}(\mathbf{B})$ rangok véletlenül megegyeznek). Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= (\mathbf{U}_a\mathbf{\Sigma}_a\mathbf{V}_a^\mathsf{T}) \otimes (\mathbf{U}_b\mathbf{\Sigma}_b\mathbf{V}_a^\mathsf{T}) \\ &= (\mathbf{U}_a \otimes \mathbf{U}_b)(\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b)(\mathbf{V}_a \otimes \mathbf{V}_b)^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{U}_a \otimes \mathbf{U}_b$ és $\mathbf{V}_a \otimes \mathbf{V}_b$ szemiortogonális és $\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b$ diagonális és invertálható, ezért mindhárom mátrix rangja ab, mindegyik teljes rangú, így szorzatuk is. Világos, hogy a diagonális mátrix spektruma

$$\sigma(\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b) = \left[\sigma_i\varsigma_j \mid i = 1, 2, \dots, a,\ j = 1, 2, \dots, b\right].$$

Hogy valóban ezek az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ szinguláris értékei, elég megmutatni, hogy ezek az elemek egy redukált szinguláris felbontásában szerepelnek. Ehhez az kell, hogy a diagonális mátrixban a diagonális elemek nagyság szerint legyenek rendezve. Legyen PP az a permutálómátrix, mellyel $\mathbf{\Sigma}_{ab} = \mathbf{P}(\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b)\mathbf{P}^\mathsf{T}$ ezt a feltételt is teljesíti és legyen $\mathbf{U}_{ab} = (\mathbf{U}_a \otimes \mathbf{U}_b)\mathbf{P}^\mathsf{T}$, $\mathbf{V}_{ab} = (\mathbf{V}_a \otimes \mathbf{Y}_b)\mathbf{P}^\mathsf{T}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= (\mathbf{U}_a \otimes \mathbf{U}_b)\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{P}(\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b)\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{P}(\mathbf{V}_a \otimes \mathbf{Y}_b)^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{U}_{ab}\mathbf{\Sigma}_{ab}\mathbf{V}_{ab}^\mathsf{T}\end{aligned}$$

redukált szinguláris felbontása $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$-nek.

8.47. Mint az előző feladatban, legyen az a rangú $\mathbf{A}$ és a b rangú $\mathbf{B}$ mátrix redukált szinguláris felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U}_a\mathbf{\Sigma}_a\mathbf{V}_a^\mathsf{T}$, $\mathbf{B} = \mathbf{U}_b\mathbf{\Sigma}_b\mathbf{V}_a^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{\Sigma}_a = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_a)$, $\mathbf{\Sigma}_b = \operatorname{diag}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_b)$, és az $\mathbf{U}_a$, $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{U}_b$ és $\mathbf{V}_b$ szemiortogonális mátrixok (de nem jelölnek azonos mátrixokat, ha az $a = \mathrm{r}(\mathbf{A})$ és $b = \mathrm{r}(\mathbf{B})$ rangok véletlenül megegyeznek).

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ \otimes \mathbf{B}^+ &= (\mathbf{V}_a\mathbf{\Sigma}_a^{-1}\mathbf{U}_a^\mathsf{T}) \otimes (\mathbf{V}_b\mathbf{\Sigma}_b^{-1}\mathbf{U}_a^\mathsf{T}) \\ &= (\mathbf{V}_a \otimes \mathbf{V}_b)(\mathbf{\Sigma}_a^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_b^{-1})(\mathbf{U}_a^\mathsf{T} \otimes \mathbf{U}_b^\mathsf{T}) \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^+ &= \left[(\mathbf{U}_a\mathbf{\Sigma}_a\mathbf{V}_a^\mathsf{T}) \otimes (\mathbf{U}_b\mathbf{\Sigma}_b\mathbf{V}_a^\mathsf{T})\right]^+ \\ &= (\mathbf{U}_a \otimes \mathbf{U}_b)(\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b)^{-1}(\mathbf{V}_a^\mathsf{T} \otimes \mathbf{V}_b^\mathsf{T}).\end{aligned}$$

Már csak azt kell belátni, hogy

$$\mathbf{\Sigma}_a^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}_b^{-1} = (\mathbf{\Sigma}_a \otimes \mathbf{\Sigma}_b)^{-1},$$

ami igaz, hisz az egyenlőség mindkét oldalán a

$$\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1\varsigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_1\varsigma_b}, \frac{1}{\sigma_2\varsigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_2\varsigma_b}, \dots, \frac{1}{\sigma_a\varsigma_b}, \dots, \frac{1}{\sigma_a\varsigma_b}\right)$$

mátrix szerepel.

8.48. Mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ spektruma $[\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0]$, és $|\varepsilon| < \sigma_r^2$, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}$ spektruma

$$[\sigma_1^2 - \varepsilon, \dots, \sigma_r^2 - \varepsilon, -\varepsilon, \dots, -\varepsilon].$$

E számok egyike sem 0, így $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}$ invertálható. Legyen $\mathbf{b}$ tetszőleges vektor és tekintsük az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert. Tudjuk, hogy a minimális abszolút értékű optimális megoldása $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$. Megmutatjuk, hogy $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ értéke azonos vele.

Legyen $\mathbf{x}_\varepsilon = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{x}_\varepsilon$ az $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{I}\right)\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egyetlen megoldása. Tekintsük az $\hat{\mathbf{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{x}_\varepsilon$ vektort. Ekkor

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\| &= \lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}_\varepsilon\| \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\|\varepsilon\mathbf{x}_\varepsilon\| = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\hat{\mathbf{x}}\| = 0\end{aligned}$$

Eszerint $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, ami az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egy optimális megoldása. Mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbb{T}\mathbf{A}\mathbf{x}_\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, ezért $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}_\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, és így $\mathbf{x}_\varepsilon$ is $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ eleme, tehát határértéke, azaz $\hat{\mathbf{x}}$ is. Eszerint e vektor a minimális abszolút értékű optimális megoldás, tehát $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$.