9.1. A definíciók alapján:

a) $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.

b) Ezek az ún. Pitagoraszi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.

c) 9, 5, 4;

d) 6, 20;

e) $p = 4$ és $p = 5$ értékre a legkisebb olyan $p-1$-dim. pozitív egész vektor, melynek p-normája egész: $\|(95800, 217519, 414560)\|_4 = 422481$, $\|(27, 84, 110, 133)\|_5 = 144$. Euler még azt sejtette, hogy ilyen nincs.

9.2. A definíció 2., 3. tulajdonságából adódik, hogy bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, és $\|\mathbf{0}\| = 0$, így a 9.2. definícióbeli 1.–3. ekvivalens az 1′, 2., 3. feltételekkel.

9.3. Például $\mathbf{x} = (1, 0, 0, \dots)$ és $\mathbf{y} = (0, 1, 0, \dots)$ esetén $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (1, 1, 0, \dots)$, így $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sqrt[p]{2} > 2 = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Ugyanakkor a gyökvonás elhagyásával ugyan elvész a pozitív homogenitás, de megmarad a háromszög-egyenlőtlenség.

9.4. $p = 0$ esetén a $0^0 = 0$ értékkel a

$$H(\mathbf{x}) = |x_1|^0 + \ldots + |x_n|^0 = \#\{x_i \mid x_i \neq 0\},$$

képlettel definiált „norma” megegyezik a nemnulla koordináták számával, ami viszont már nem csak $\mathbb{K}$-ban, de tetszőleges testben is értelmezhető. Ez valójában nem norma, hisz nem pozitív homogén ($\mathbb{K}$-ban sem), de igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Ennek alakja

$$H(\mathbf{x}) + H(\mathbf{y}) \geqslant H(\mathbf{x}+\mathbf{y}).$$

Ha $H(\mathbf{x}) = k$ és $H(\mathbf{y}) = l$, azaz az I és J indexhalmazokra $x_i \neq 0$ ha $i \in I$ és $y_j \neq 0$, ha $j \in J$, ahol $|I| = k$, $|J| = l$, akkor

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &\leqslant |I \cup J| \leqslant |I \cup J| + |I \cap J| = |I| + |J| \\ &= H(\mathbf{x}) + H(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

A $H(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant |I \cup J|$ azért igaz, mert két nemnulla koordináta összege lehet 0. A H függvénnyel definiálható az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok Hamming-távolsága:

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Ez metrika, hisz bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{F}^n$ vektorokra *1)* $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$, *2)* $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_H(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, *3)* $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_H(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geqslant d_H(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Ez utóbbi háromszög-egyenlőtlenség visszavezethető az H-ra vonatkozó egyenlőtlenségre:

$$\begin{aligned} d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_H(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= H(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + H(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\ &\geqslant H(\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{z} - \mathbf{y}) = H(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \\ &= d_H(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

9.5. A háromszög-egyenlőtlenség 1-normára, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1. \end{aligned}$$

∞-normára:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty &= \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \\ &\geqslant \max_i |x_i + y_i| = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty. \end{aligned}$$

9.6. *a)* Legyen $\|.\|_\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$, ahol $\|.\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{K}^n$-ben. Ekkor

1. $\|\mathbf{x}\|_\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \geqslant 0$, és $\|\mathbf{x}\|_\mathbf{A} = 0 \iff \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|c\mathbf{x}\|_\mathbf{A} = \|\mathbf{A}(c\mathbf{x})\| = \|c\mathbf{A}\mathbf{x}\| = |c|\,\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = |c|\,\|\mathbf{x}\|_\mathbf{A}$.
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|_\mathbf{A} + \|\mathbf{y}\|_\mathbf{A}$.

b) Legyen

$$\|.\|_* : \mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \max_{\|\mathbf{e}\|=1} \mathbf{x}\cdot\mathbf{e},$$

ahol $\|.\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-ben.

1. $\|\mathbf{x}\|_* = \sup_{\|\mathbf{e}\|=1} \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \geqslant 0$, és $\|\mathbf{x}\|_* = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ugyanis $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén az $\mathbf{e} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ választással $\|\mathbf{x}\|_* \geqslant \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} = \|\mathbf{x}\|_2 > 0$.
2. Pozitív homogenitás: mivel $\max_{\|\mathbf{e}\|=1} \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} = \max_{\|\mathbf{e}\|=1} |\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|$, ezért

$$\|c\mathbf{x}\|_* = \sup_{\|\mathbf{e}\|=1} |(c\mathbf{x})\cdot\mathbf{e}| = |c| \max_{\|\mathbf{e}\|=1} \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} = |c|\|\mathbf{x}\|_*.$$

3. A háromszög-egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_* &= \max_{\|\mathbf{e}\|=1} (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{e} \\ &= \max_{\|\mathbf{e}\|=1} (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{e}) \\ &\leqslant \max_{\|\mathbf{e}\|=1} \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} + \max_{\|\mathbf{e}\|=1} \mathbf{y}\cdot\mathbf{e} \\ &= \|\mathbf{x}\|_* + \|\mathbf{y}\|_*. \end{aligned}$$

9.7. Megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{x}, \mathbf{x}_m \in \mathbb{K}^n$ ($m \in \mathbb{N}$), és a $\|.\|$ normában $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{x}_m\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Ha $\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$, azaz $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $m > N$ esetén $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\| < \varepsilon$, akkor

$$\big|\|\mathbf{x}_m\| - \|\mathbf{x}\|\big| \leqslant \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\| < \varepsilon.$$

Ez épp azt jelenti, hogy az $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ függvény folytonos.

9.8. A feladatbeli ekvivalenciák táblázatán sorfolytonosan haladva:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot |x_i| \leqslant \|\mathbf{1}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2,$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max_j |x_j| = n\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leqslant n \max_i |x_i|^2 = n\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^2 = \max_i |x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

(Az első egyenlőtlenségnél igazolásánál a CBS-egyenlőtlenséget alkalmaztuk, a többi eset nyilvánvaló.)

9.9. *a)* Mivel $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ esetén $q = 1 + \frac{1}{p-1}$, és $f(x) = x^{p-1}$ inverze $f^{-1}(x) = x^{1/(p-1)} = x^{q-1}$, ezért

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^a = \frac{a^p}{p},$$

$$\int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b x^{q-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^q}{q}\right]_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

Ebből következik, hogy

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ és

$$a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p},\ b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}.$$

Az előző pont eredményébe helyettesítve

$$\frac{|x_i y_i|}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \leqslant \frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p p} + \frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q q}.$$

Innen pedig

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \rightsquigarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

c) Végül

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\mathbf{x}^\mathsf{H} \mathbf{y}| = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

9.10. *a)* Ha $1/p + 1/q = 1$, akkor p-vel szorozva $1 + p/q = p$. Másrészt felhasználva, hogy $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ kapjuk, hogy

$$|a+b|^p = |a+b||a+b|^{\frac{p}{q}} \leqslant (|a|+|b|)|a+b|^{\frac{p}{q}}$$
$$= |a||a+b|^{\frac{p}{q}} + |b||a+b|^{\frac{p}{q}}.$$

b) Először az *a)*-beli majd az előző feladatbeli Hölder-egyenlőtlenséget, valamint az $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ egyenlőséget használva

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||x_i + y_i|^{\frac{p}{q}}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{\frac{p}{q}} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{\frac{p}{q}}$$
$$\leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Innen az utolsó kifejezés jobb oldali tényezőjével osztva a Minkowski-egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leqslant \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

9.11. A p-norma norma, ui. bármely $\mathbf{x}, qyy \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $c \in \mathbb{C}$ skalárra

a) $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0,$

$\|\mathbf{x}\|_p = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$

b) $\|c\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |cx_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |c|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$= |c|\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$

c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leqslant \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ (Minkowski-egyenlőtl.)

9.12. Jelölje a hat mátrixot rendre $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$.
$\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{D}\|_F = 9$, $\|\mathbf{D}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{D}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{D}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{E}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{E}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{E}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{E}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{F}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{F}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{F}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{F}\|_\infty = 5$.

9.13. Ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren hasonló egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixhoz, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{H}$ valamely unitér $\mathbf{Q}$ mátrixszal. Ekkor $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} \sim \mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{\Lambda}$ is fönnáll, ui. $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{H})^\mathsf{H}(\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{H}) = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{H}$, tehát $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ és $\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{\Lambda}$ sajátértékei megegyeznek. Másrészt $\mathbf{\Lambda}^\mathsf{H}\mathbf{\Lambda}$ minden sajátértéke $|\lambda|^2$ alakú, ahol λ az $\mathbf{A}$ valamely sajátértéke. Összegezve: mivel $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$, azaz az $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének gyöke, ami viszont megegyezik $\mathbf{A}$ legnagyobb abszolút értékű sajátértékének abszolút értékével, azaz a $\rho(\mathbf{A})$ spektrálsugárral.

9.14. ($\Rightarrow$): Ha a $\mathbf{P}$ vetítőmátrix merőleges vetítés mátrixa, akkor $\|\mathbf{P}\|_2 = 1$.

Ha $\mathbf{P}$ vetítőmátrix, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér, míg $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ a 0-hoz tartozó sajátaltér.

Ha $\mathbf{P}$ vetítőmátrix, akkor $\|\mathbf{P}\|_2 \geqslant 1$, ui. $\|\mathbf{P}\|_2 = \|\mathbf{P}^2\|_2 \leqslant \|\mathbf{P}\|_2^2$, így a $\|\mathbf{P}\|_2$-vel való osztás igazolja az egyenlőtlenséget.

Ha $\mathbf{P}$ merőleges vetítés mátrixa, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{P}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, így a Pitagorasz-tétel szerint a merőleges összetevőkre való $\mathbf{x} = \mathbf{Px} + (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}$ bontásra

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{Px}\|_2^2 + \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}\|_2^2 \geqslant \|\mathbf{Px}\|_2^2.$$

Így az $\|\mathbf{x}\|_2 \geqslant \|\mathbf{Px}\|_2$ következményeként $\|\mathbf{P}\|_2 \leqslant 1$, azaz a korábbival összevetve $\|\mathbf{P}\|_2 = 1$.

($\Leftarrow$): Ha a $\mathbf{P}$ vetítőmátrixra $\|\mathbf{P}\|_2 = 1$, akkor $\mathbf{P}$ merőleges vetítés mátrixa.

Merőlegességről lévén szó, ortonormált bázist keresünk a vetítéshez. Erre a Schur-tétel alkalmas is, mely szerint $\mathbf{P}$ unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felsőháromszög-mátrixhoz, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{UTU}^{-1}, \text{ ill. } \mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{PU},$$

ahol $\mathbf{U}$ unitér. Egyrészt $\mathbf{T}$ is vetítés, hisz

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{PUU}^{-1}\mathbf{PU} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{P}^2\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{PU} = \mathbf{T},$$

másrészt $\|\mathbf{T}\|_2 = 1$, ui. $\mathbf{U}$ unitér, ezért $\|\mathbf{U}\|_2 = 1$, és így

$$1 = \|\mathbf{P}\|_2 = \|\mathbf{UTU}^{-1}\|_2 \leqslant \|\mathbf{U}\|_2\|\mathbf{T}\|_2\|\mathbf{U}^{-1}\|_2 = \|\mathbf{T}\|_2,$$

továbbá

$$\|\mathbf{T}\|_2 = \|\mathbf{U}^{-1}\mathbf{PU}\|_2 \leqslant \|\mathbf{U}^{-1}\|_2\|\mathbf{P}\|_2\|\mathbf{U}\|_2 = \|\mathbf{P}\|_2 = 1.$$

$\mathbf{U}$ oszlopainak cseréjével elérhető, hogy $\mathbf{T}$ főátlójában előbb legyenek a 0, majd utána az 1 sajátértékek, így

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^2 & \mathbf{X} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}^2 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ felsőháromszög-mátrixok, $\mathbf{A}$ főátlójában 0-k, $\mathbf{C}$ főátlójában 1-ek vannak. Mivel $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, és így $\mathbf{A} = \mathbf{A}^k$ ($k \in \mathbb{N}^+$), másrészt $\mathbf{A}$ nilpotens, azaz $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ valamely k-ra, ezért $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. Mivel $\mathbf{C} = \mathbf{C}^2$, így $\mathbf{C} = \mathbf{C}^k$, és $\mathbf{C} - \mathbf{I}$ nilpotens, azaz valamely k-ra $(\mathbf{C}-\mathbf{I})^k = \mathbf{O}$, ezért a binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{O} = (\mathbf{C}-\mathbf{I})^k &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\mathbf{C}^{k-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}\right)\mathbf{C} + (-1)^k\mathbf{I} = (-1)^k(-\mathbf{C}+\mathbf{I}),\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, és így

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Végül megmutatjuk, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. Ha a $\mathbf{B}$ mátrixnak a $\mathbf{T}$ j-edik oszlopába eső valamely eleme nem nulla, akkor $\|\mathbf{Te}_j\|_2 > 1$. Az $1 = \|\mathbf{T}\|_2\|\mathbf{e}_j\|_2 \geqslant \|\mathbf{Te}_j\|_2 > 1$ ellentmondás igazolja, hogy $\mathbf{B}$ minden eleme 0, így $\mathbf{T}$ diagonális. Ekkor $\mathcal{N}(\mathbf{P}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{P})$.

9.15. Tekintsük például az alábbi három mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezekben 2 az elemek maximuma, így bármely két mátrix maximum normájának szorzata 4. Szorzataik:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ezek elemeinek maximuma rendre 2, 4, 6.

9.16. Ha volna olyan skaláris szorzás $\mathbb{K}^n$-en, mely által indukált vektornorma a maximumnorma lenne, akkor a 7.13. feladat szerint igaz lenne a belőle az $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$ képlettel definiált normára a

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

paralelogrammaazonosság. Ez azonban pl. az $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_2$ vektorokra a maximumnormával nem áll fenn, ui. $\|\mathbf{e}_1\|_{\max} = 1$, $\|\mathbf{e}_2\|_{\max} = 1$, $\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|_{\max} = 1$, $\|\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\|_{\max} = 1$, és $1+1 \neq 2+2$.

9.17. Ha $\|.\|_v$ egy vektornorma, akkor az indukált mátrixnorma definíciója szerint

$$\|\mathbf{I}\|_v = \max_{\|\mathbf{x}\|_v=1}\frac{\|\mathbf{Ix}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} = 1.$$

Másrészt

$$\|\mathbf{I}\|_F = \sqrt{1+1+\ldots+1} = \sqrt{n}.$$

9.18. Ha λ egy tetszőleges sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó egyik sajátvektor, azaz $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, akkor

$$\mathbf{Axx}^{\mathsf{H}} = \lambda\mathbf{xx}^{\mathsf{H}} \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\|\left\|\mathbf{xx}^{\mathsf{H}}\right\| \geqslant \left\|\mathbf{Axx}^{\mathsf{H}}\right\| = |\lambda|\left\|\mathbf{xx}^{\mathsf{H}}\right\|,$$

és mivel $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így $\mathbf{xx}^{\mathsf{H}} \neq \mathbf{O}$, azaz $\left\|\mathbf{xx}^{\mathsf{H}}\right\| \neq 0$, vagyis leosztva vele $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ adódik. Ez minden sajátértékre, így a spektrálsugárra is igaz.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan k_ε küszöbindex, hogy $k > k_\varepsilon$ esetén

$$\rho(\mathbf{A}) \leqslant \left(\|\mathbf{A}^k\|\right)^{1/k} < \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon,$$

ami igazolja a második összefüggést. Mivel $\rho(\mathbf{A})^k = \rho(\mathbf{A}^k) \leqslant \|\mathbf{A}^k\|$, ezért $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}^k\|^{1/k}$. Mivel $\mathbf{A}/(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)$ spektrálsugara 1-nél kisebb, ezért a 6.105. tétel szerint

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})+\varepsilon}\right)^k = \mathbf{O}.$$

Mindkét oldal normáját véve a bal oldal normája 0-hoz tart, azaz

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|\mathbf{A}^k\|}{(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^k} = 0.$$

Eszerint van egy olyan k_ε küszöbindex, hogy minden $k > k_\varepsilon$ egészre

$$\frac{\|\mathbf{A}^k\|}{(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon)^k} < 1,$$

azaz $\|\mathbf{A}^k\|^{1/k} < \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon$, amivel igazoltuk az állítást.

9.19. Mivel $\kappa_2 = \sigma_1/\sigma_n$, és $\sigma_1 \geqslant \sigma_n$, ezért bármely mátrixra $\kappa_2 \geqslant 1$. Ebbe beletartozik az az eset is, amikor $\sigma_n = 0$, ekkor ugyanis definíció szerint $\kappa_2 = \infty$.

Ha $\kappa_2 = 1$, akkor $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = c$ valamely pozitív c konstansra. Eszerint minden $\mathbb{C}^n$ valamely bázisának minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = c^2\mathbf{x}$. De akkor e bázisvektorok minden lineáris kombinációjára, azaz a $\mathbb{C}^n$ minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = c^2\mathbf{x}$, így $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = c^2\mathbf{I}$. Ekkor az $\mathbf{U} = \frac{1}{c}\mathbf{A}$ mátrix unitér, azaz $\mathbf{A} = c\mathbf{U}$, és ezt kellet igazolni.

9.20. Invertálható $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószáma definíció szerint $\kappa = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$. Legyen $\mathbf{x}$, ill. $\tilde{\mathbf{x}}$ az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ill. az $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \mathbf{h}$ megoldása. Így $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \mathbf{h}$, és $\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$. Hasonlóképpen $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|$. Mindezekből

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geqslant \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|} \geqslant \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|} = \kappa^{-1}\frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Másrészt $\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{h}\|$ és $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$, amiből

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa\frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy

$$\kappa^{-1}\frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leqslant \frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \kappa\frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Ez tömören azt jelenti, hogy ha $\mathbf{A}$ jól kondicionált, azaz κ értéke kicsi, akkor kis relatív hiba a $\mathbf{b}$ vektoron a megoldásban is csak kis változást okozhat. Más szóval a $\mathbf{b}$ apró mérési vagy kerekítési hibái okozta bizonytalanságok sem rontják a megoldás megbízhatóságát. Ha $\mathbf{A}$ rosszul kondicionált, azaz κ értéke nagy, akkor kis relatív hiba is okozhat nagy változást a megoldásban, ami így kevéssé megbízható.

9.21. A mögöttes tartalom analízisében (Latent semantic analysis – LSA) használt egyik technika a szavak és dokumentumok kapcsolatát leíró mátrix kis rangú közelítésével való számolás. A feladatbeli r rangú $\mathbf{G}$ mátrix redukált szinguláris felbontása és annak legjobb k rangú ($k < r$) közelítése

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^\mathsf{T}, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{U}_k\mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T}.$$

Így a keresett

$$\cos\gamma_j = \frac{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{G}\mathbf{e}_j}{\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{G}\mathbf{e}_j\|}$$

helyett a

$$\cos\varphi_j = \frac{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{G}_k\mathbf{e}_j}{\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{G}_k\mathbf{e}_j\|}$$

értékkel számolhatunk. Mivel $\mathbf{G}_k\mathbf{e}_j = \mathbf{U}_k\mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T}\mathbf{e}_j$, és $\|\mathbf{G}_k\mathbf{e}_j\| = \|\mathbf{U}_k\mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T}\mathbf{e}_j\| = \|\mathbf{U}_k\mathbf{w}_j\| = \|\mathbf{w}_j\|$, ahol $\mathbf{w}_j = \mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T}\mathbf{e}_j$, ezért számolhatunk a

$$\cos\varphi_j = \frac{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{G}_k\mathbf{e}_j}{\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{G}_k\mathbf{e}_j\|} = \frac{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{U}_k\mathbf{w}_j}{\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{w}_j\|}$$

képlettel. Mivel előre kiszámolható az $\mathbf{U}_k$ és a $\mathbf{W}_k = \mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^\mathsf{T} = [\mathbf{w}_1|\ldots|\mathbf{w}_n]$ mátrix, a többi számolást elég akkor elvégezni, ha $\mathbf{q}$ és j értékét ismerjük.

9.22. Vezessük be az $\mathbf{a} = \operatorname{vec}(\mathbf{A})$, $\mathbf{h} = \operatorname{vec}(\mathbf{H})$, $\mathbf{d} = \operatorname{vec}(\mathbf{D}^\mathsf{T})$, $\mathbf{x} = \operatorname{vec}(\mathbf{X})$ jelöléseket. E vektorok az $\mathbb{R}^{mn}$ elemei. A $\|\mathbf{H}\|$ norma helyett tekinthetjük a $\|\mathbf{H}\|_F$ normát is, hisz ezek ekvivalensek. Konkrétan $\|\mathbf{H}\|_2 = \sigma_1$, $\|\mathbf{H}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2}$, ahol $k = \min(m, n)$, így

$$\frac{\|\mathbf{H}\|_F}{\sqrt{k}} \leqslant \|\mathbf{H}\|_2 = \sigma_1 \leqslant \|\mathbf{H}\|_F \leqslant \sqrt{k}\|\mathbf{H}\|_2,$$

és $\|\mathbf{H}\|_F = \|\mathbf{h}\|$. Eszerint a meghatározandó $\mathbf{D}$ mátrix megkapható a

$$\lim_{\mathbf{H}\to\mathbf{O}} \frac{f(\mathbf{A}+\mathbf{H}) - f(\mathbf{A}) - \operatorname{tr}(\mathbf{D}\mathbf{H})}{\|\mathbf{H}\|} = \mathbf{O}$$

határérték helyett a

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{d}\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

határértékkel is. Másrészt $\mathbf{d} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$, azaz

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_{11}}\ \frac{\partial f}{\partial x_{12}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{1n}}\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{m1}}\ \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{mn}}\right]^\mathsf{T}.$$

Az $\mathbf{d}\cdot\mathbf{h} = \operatorname{vec}(\mathbf{D}^\mathsf{T})\cdot\operatorname{vec}(\mathbf{H}) = \operatorname{tr}(\mathbf{D}\mathbf{H}) = \operatorname{tr}(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{H})$ igazolja az állítást. A derivált az $\mathbb{R}^{m\times n}$ tér egy adott $\mathbf{A}$ „pontjához” tartozik, ezt is jelölve precízebben: $\mathbf{d}_{f,\mathbf{a}}\cdot\mathbf{h} = \operatorname{tr}(\mathbf{D}_{f,\mathbf{A}}\mathbf{H}) = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{A})\,\mathbf{H}\right)$.

9.23. *a)* $(3t^2, -2t)\big|_{t=2} = (12, -4)$, a derivált különféle jelöléseivel és mátrixalakban

$$\mathbf{D}_{\mathbf{r},2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(2) = \dot{\mathbf{r}}(2) = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

b) A Jacobi-mátrix és értéke az adott helyen

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \sqrt{\frac{1}{uv}} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} & \sqrt{\frac{u}{v}} \end{bmatrix}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) A Jacobi-mátrix és értéke az adott helyen

$$\begin{bmatrix} v & u \\ 2u & 2v \\ 3u^2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) A gradiensvektornak is nevezett eredmény mátrixalakja 1×3-as:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{f,(1,2,3)} &= \mathbf{grad}\, f(1,2,3) \\ &= \begin{bmatrix} yz & xz & xy - 2z \end{bmatrix}\Big|_{(1,2,3)} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e) A Jacobi-mátrix általános alakja és a megadott helyen való értéke:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} vw & -2xy \\ uw & -x^2 \\ uv & 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 15 & -4 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint az $\mathbf{A}$-ban fölvett függvényértéktől való eltérés az $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{X}$ helyen jól közelíthető a

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 15 & -4 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \right) \\ &= 12\Delta u + 15\Delta v + 20\Delta w - 4\Delta x - 4\Delta y. \end{aligned}$$

értékkel.

9.24. A függvény megváltozásának becsléséhez az $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ értéket kell megbecsülni. A differenciálhatóság 9.15. definíciója szerint erre a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ mennyiség alkalmas, ha a függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ pontban. Eszerint tehát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}.$$

E képletet felhasználva az alábbi megoldásokra jutunk:

a) E feladatban $\mathbf{h} = (-0.05, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{f,(0,1)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.05$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= f(-0.05, 1.1) \approx f(0,1) + \mathbf{D}_{f,(0,1)} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ &= 1.05, \end{aligned}$$

azaz $f(-0.05, 1.1) \approx 1.05$. Ha pl.

$$f(x,y) = x^2y - xy^3 + 1,$$

ami kielégíti a feltételeket, akkor a pontos érték $f(-0.05, 0.1) = 1.0693$.

b) Itt $\mathbf{h} = (-0.2, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1)}\mathbf{h} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{10} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} + \frac{1}{10} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.3375 \\ -0.1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke $\mathbf{f}(0.8, 1.1) \approx \mathbf{f}(1,1) + (0.3375, -0.1) = (-0.0375, 1.9)$. Ha pl. $\mathbf{f}(x,y) = (-x^3/2 + y^3/8, x+y)$, akkor a pontos érték $f(0.8, 1.1) = (-0.089625, 1.9)$.

c) Itt $h = 0.1$, így a függvényérték becslése

$$\dot{\mathbf{f}}(1)h = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0.1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{f}(1.1) \approx \begin{bmatrix} 3.2 \\ 3.1 \end{bmatrix}.$$

d) A $\mathbf{B}$ közel van az $\mathbf{A}$-hoz, így

$$\begin{aligned} f(\mathbf{B}) &\approx f(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{A})(\mathbf{B}-\mathbf{A}) \right) \\ &= f\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 2 - 0.2 = 1.8. \end{aligned}$$

9.25. *a)* A Jacobi-determináns és értéke az adott helyen:

$$d(x,y,z) = \begin{vmatrix} 2x & yz & 1 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & xy & -1 \end{vmatrix} = -2x^2z, \quad d(1,2,3) = -6.$$

A leképezés az adott pont környékén meghatszorozza a térfogatot, és megfordítja a körüljárást.

b) A Jacobi-determináns és értéke az adott helyen:

$$\begin{aligned} d(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 0 & z\cos(yz) & y\cos(yz) \\ z\cos(xz) & 0 & x\cos(xz) \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2xyz\cos(yz)\cos(xz)\cos(xy), \\ d(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) &= 2\pi\sqrt{\pi} \approx 11.137. \end{aligned}$$

A leképezés megtartja a körüljárást az adott pont környezetében, és a térfogatot több, mint 11-szeresére növeli.

c) A Jacobi-determináns és értéke az adott helyen:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{y}{x^3}} & \sqrt{\frac{1}{xy}} \\ \sqrt{\frac{y}{x}} & \sqrt{\frac{x}{y}} \end{vmatrix}_{(u,v)} = -\left.\frac{1}{2x}\right|_{(u,v)} = -\frac{1}{2u}.$$

Ha $u > 0$, megfordítja a körüljárást.

9.26. *a)* $\ln 2$, *b)* $\frac{1}{10}(b^2 - a^2)(p^{-5} - q^{-5})$, *c)* $\frac{8}{27}abc$, *d)* $\frac{7}{3}\pi$.

9.27. *a)* Megoldva az $(x_1^2 - x_2^2, x_1x_2) = (4, \sqrt{5})$ egyenletet, kapjuk, hogy

$$\begin{matrix} x_1^2 - x_2^2 = 4 \\ x_1x_2 = \sqrt{5} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} x_1^4 - 4x_1^2 - 5 = 0 \\ x_1 > 0 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = 1. \end{matrix}$$

Tehát az $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ függvény deriváltja az $(x_1, x_2) = (\sqrt{5}, 1)$ pontban

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & x_2 \\ -2x_2 & x_1 \end{bmatrix}_{(\sqrt{5},1)} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & 1 \\ -2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

E mátrix inverze az inverz függvény deriváltjának mátrixa, azaz

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{-1}}{\partial \mathbf{x}}(4, \sqrt{5}) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ 2 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

b) Az $\mathbf{y} = (1,2,3)$ ősképe könnyen megállapítható: ha $x_1 > 0$, akkor x_2 is, és $x_1 = x_2 = 1$, ahonnan $x_3 = 1$ adódik, azaz $\mathbf{f}(1,1,1) = (1,2,3)$. Így az $\mathbf{f}$

függvény $\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1,1)}$ deriváltmátrixának inverzét keressük.

$$\mathbf{D_f} = \begin{bmatrix} 3x_1^2x_2 & x_1^3 & 0 \\ 2x_2^3 & 6x_1x_2^2 & 0 \\ 3x_2x_3^3 & 3x_1x_3^3 & 9x_1x_2x_3^2 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{D_f} = 144x_1^4x_2^4x_3^2 \neq 0.$$

A legegyszerűbb, ha előbb kiszámoljuk a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1,1)}$ értéket, és azt invertáljuk:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1,1)} = \left.\begin{bmatrix} 3x_1^2x_2 & x_1^3 & 0 \\ 2x_2^3 & 6x_1x_2^2 & 0 \\ 3x_2x_3^3 & 3x_1x_3^3 & 9x_1x_2x_3^2 \end{bmatrix}\right|_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix},$$

és $\mathbf{D}_{\mathbf{f}^{-1},(1,2,3)} = \mathbf{D}^{-1}_{\mathbf{f},(1,1,1)}$, így

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f}^{-1},(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Jóval körülményesebb út, ha előbb számoljuk ki $\mathbf{D_f}$ inverzét és csak utána helyettesítünk:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f}^{-1}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8x_1^2x_2} & -\frac{1}{16x_2^3} & 0 \\ -\frac{1}{8x_1^3} & \frac{3}{16x_1x_2^2} & 0 \\ -\frac{x_3}{12x_1^3x_2} & -\frac{x_3}{24x_1x_2^3} & \frac{1}{9x_1x_2x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f}^{-1},(1,2,3)} = \mathbf{D}^{-1}_{\mathbf{f},(1,1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Legyünk óvatosak. Az inverz függvényt nem határoztuk meg, és nem azt deriváltuk, a $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{-1}$ kifejezésben még mindig az x_1, x_2, x_3 változók szerepelnek, így az $(1,1,1)$ vektort kell behelyettesíteni, nem az $(1,2,3)$-at!

9.28. A Python `sympy` csomagja – nem az általunk a könyvben használt számlálóelrendezést, hanem – a nevezőelrendezést (denominator layout) használja.

9.29. Mindegyik feladatban könnyen ellenőrizhető, hogy a kezdeti értékek 0, 1, vagy 1, 1, vagy 1, 2, így elég csak a rekurzív formulát ellenőrizni.

a) Az összes olyan $n+1$ hosszú bináris sorozat, mely nem tartalmaz két szomszédos 0-t, megkapható úgy, hogy egy n hosszú elé az első bitjétől különböző bitet írunk, vagy egy $n-1$ hosszú elé 11-et.

b) Az összes olyan $n+1$ hosszú bináris sorozat, mely 0-val kezdődik, és az egymás melletti azonos jegyek száma páratlan, megkapható úgy, hogy az n hosszúak jegyeit az ellenkezőre változtatjuk, és eléjük írunk egy 0-t, vagy az $n-1$ hosszúak elé 00-t.

c) Az $\{1,\dots,n+1\}$ halmaz összes olyan részhalmaza, melyben nincsenek szomszédos számok, megkapható úgy, hogy az vagy az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz ilyen részhalmaza, vagy az $\{1,2,\dots,n-1\}$ ilyen részhalmaza hozzátéve az $n+1$ számot.

d) A $n+1$-edrendű $\mathbf{T}_{n+1}$ tridiagonális mátrixból kiválasztható összes nemnulla kígyó vagy egy $\mathbf{T}_n$-beli kígyóból és a $t_{n+1,n+1}$ elemből vagy egy $\mathbf{T}_{n-1}$-beli kígyóból és a $t_{n,n+1}$, $t_{n+1,n}$ elemekből áll.

e) A $2\times(n+1)$-es sakktábla ilyen dominófedései megkaphatók vagy egy $2\times n$-es sakktábla lefedéseiből egy függőlegesen hozzáillesztett dominóval, vagy $2\times(n-1)$-es sakktábla lefedéseiből két vízszintesen hozzáillesztett dominóval.

f) Azonos a *d)*-vel!

g) Az $n+1$-dik hónapban azok a nyúlpárok elnek, melyek egy hónappal korábban is éltek, és azok, amelyek épp akkor születtek, de ezek száma azonos azokéval, amelyek 2 hónappal korábban éltek.

9.30. A rekurzív sorozat explicit alakja, a kezdeti feltételeket is kielégítő alakja, és esetleg a sorozat néhány első tagja:

a) $c_1(-1)^n + c_2 2^n$, $x_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$,

b) $c_1(1+\mathrm{i})^n + c_2(1-\mathrm{i})^n$, $x_n = \frac{\mathrm{i}}{2}(1-\mathrm{i})^n - \frac{\mathrm{i}}{2}(1+\mathrm{i})^n$, $0, 1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, 0, 16, \dots$

c) $c_1(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n + c_2(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n$, $x_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{2}}((1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n - (1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n)$,

d) $c_1 + c_2 n$, $x_n = 2 - n$,

e) $c_1 2^n + c_2 n 2^n$, $x_n = 2^{n+1} - \frac{3}{2}n2^n$,

f) A differenciaegyenlet karakterisztikus polinomja $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = (\lambda + 2 - 3\mathrm{i})(\lambda + 2 + 3\mathrm{i})$. Így az összes megoldás $x_n = c_1(-2+3\mathrm{i})^n + c_2(-2-3\mathrm{i})^n$. A kezdeti feltételek a következő egyenletrendszerre vezetnek:

$$\begin{aligned} n = 0, x_0 = 1: &\quad c_1 + c_2 = 1, \\ n = 1, x_1 = 1: &\quad (-2+3\mathrm{i})c_1 + (-2-3\mathrm{i})c_2 = 1, \end{aligned}$$

amelynek megoldása: $c_1 = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$, $c_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$. Innen a kezdeti feltételeket is kielégítő megoldás az

$$x_n = \frac{1-\mathrm{i}}{2}(-2+3\mathrm{i})^n + \frac{1+\mathrm{i}}{2}(-2-3\mathrm{i})^n$$

sorozat, amelynek első néhány tagja 1, 1, -17, 55, 1, -719, 2863,$\dots$.

g) $c_1(-1)^n + c_2 + c_3 n$, $x_n = \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$,

h) $(c_1 + c_2(-1)^n)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} + (c_3\mathrm{i}^n + c_4(-\mathrm{i})^n)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$. Az ebből az egyenletrendszerből a négy ismeretlenre felírható ízléstelenül bonyolultnak kinéző egyenletrendszert könnyen megoldhatjuk, ha észrevesszük, hogy itt a Fibonacci-sorozat tagjai 0-kal felváltva követik egymást, így a Fibonacci-sorozat explicit képlete felhasználásával azonnal megkapjuk e sorozat explicit képletét, hisz $c_1 = c_2$, $c_3 = c_4$ biztosítja, hogy minden második érték 0 legyen, és az $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$ váltakozó előjele beolvasztható a gyökös kifejezésbe, hisz $(-1)^k(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^k = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k$, tehát

$$x_n = \frac{(1+(-1)^n)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} - (\mathrm{i}^n + (-\mathrm{i})^n)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{5}},$$

i) $c_1 e^{\frac{1}{3}\mathrm{i}\pi n} + c_2 e^{-\frac{1}{3}\mathrm{i}\pi n} + c_3$, $x_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{1}{3}\pi n)$, $1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, \dots$.

9.31. A Fibonacci-sorozat apró változtatásával konstruálható ilyen sorozat. Mindegyik kérdéshez megadunk egy rekurzív összefüggést és a sorozat első néhány elemét, a kezdőértékeket vastagon kiemelve.

a) $x_n = x_{n-2} + x_{n-4}$, $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 0, 2, 0, 3, 0, 5, 0, 8, 0, \ldots$ (minden második elem 0, köztük a Fibonacci-sorozat).

b) $x_n = x_{n-2} + x_{n-4}$, $\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 5, \ldots$ (a harmadik elem, valamint minden második elem 0).

c) $x_n = -x_{n-2} - x_{n-4}$, $\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -1, 0, 1, 0, 0, 0, -1, \ldots$ (egy 6 hosszú sorozat ismételve, minden második és minden harmadik elem 0).

9.32. *a)* A megoldás

$$\mathbf{x}_n = \frac{1}{3^n} \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

ahol f_n az n-edik Fibonacci-szám. A kifejezés explicitté tehető a Fibonacci-számok explicit alakjának behelyettesítésével.

b) Mivel az együtthatómátrix karakterisztikus polinomja $\chi(x) = x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$, így sajátértékei

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{6},$$

tehát a spektrálsugár kisebb 1-nél. Ekkor a határérték létezik, és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

9.33. Ha csak annyit tekintünk feladatunknak, hogy *a)* igazoljuk a sajátértékekre és sajátvektorokra vonatkozó formulát, akkor elég azt egy behelyettesítéssel ellenőrizni, de ha az is kérdés, hogy *b)* hogyan jöhetünk rá egy ilyen képletre, akkor másfelől kell a kérdéshez közelíteni. Mindkét esetben egyszerűsíthetjük a számításokat azzal, ha a $\mathbf{T}$ mátrix helyett a

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - a\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & b & & & \\ c & 0 & b & & \\ & c & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot vizsgáljuk. Ugyanis $\mathbf{T}$-nek $(\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ pontosan akkor sajátpárja, ha $(\lambda_k - a, \mathbf{x}_k)$ az $\mathbf{S} = \mathbf{T} - a\mathbf{I}$ mátrixnak. Igazolnunk kell tehát, hogy az $\mathbf{S}$ mátrix $(\mu_k, \mathbf{x}_k)$ sajátpárjaira

$$\mu_k = 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad [\mathbf{x}_k]_j = \left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^j \sin\frac{jk\pi}{n+1},$$

ahol $k = 1, 2, \ldots, n$ és $j = 1, 2, \ldots, n$.

a) Az $\mathbf{S}$ mátrix első és utolsó, valamint középső soraira külön-külön kell ellenőrizni az $\mathbf{S}\mathbf{x}_k = \mu_k\mathbf{x}_k$ összefüggést. Az első sor esetén ellenőrzendő a $b[\mathbf{x}_k]_2 = \mu_k[\mathbf{x}_k]_1$ képlet. Kifejtve

$$b \cdot \frac{c}{b} \sin\frac{2k\pi}{n+1} = 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{c}{b}} \sin\frac{k\pi}{n+1},$$

amit egyszerűsítés és a $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosság igazol. Az utolsó sor esetén igazolni kell a $c[\mathbf{x}_k]_{n-1} = \mu_k[\mathbf{x}_k]_n$ összefüggést. Kifejtve

$$c\sqrt{\frac{c^{n-1}}{b^{n-1}}} \sin\frac{(n-1)k\pi}{n+1} = 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1}\sqrt{\frac{c^n}{b^n}} \sin\frac{nk\pi}{n+1},$$

amit a $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ azonosság igazol az $\alpha = k\pi$, $\beta = \frac{(n-1)k\pi}{n+1}$ értékekkel. Végül az $1 < j < n$ indexekre a $c[\mathbf{x}_k]_{j-1} + b[\mathbf{x}_k]_{j+1} = \mu_k[\mathbf{x}_k]_j$ összefüggést kell igazolni:

$$\begin{aligned} &c\sqrt{\frac{c^{j-1}}{b^{j-1}}} \sin\frac{(j-1)k\pi}{n+1} + b\sqrt{\frac{c^{j+1}}{b^{j+1}}} \sin\frac{(j+1)k\pi}{n+1} \\ &= 2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{c^j}{b^j}} \sin\frac{jk\pi}{n+1}, \end{aligned}$$

A $\sqrt{c^{j+1}/b^{j-1}}$ kifejezéssel való egyszerűsítés után az $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ azonosság igazol az $\alpha = \frac{(j-1)k\pi}{n+1}$, $\beta = \frac{(j+1)k\pi}{n+1}$ értékekkel.

b) Az érdekes kérdés az, hogy hogy jöhet ki ez a meglepő, trigonometrikus függvényeket tartalmazó eredmény a sajátértékekre és sajátvektorokra. A sajátértékek meghatározásához az egyszerűség kedvéért a $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ zérushelyei helyett a $D_n = \det(\mathbf{S} - \mu\mathbf{I})$ zérushelyeit keressük. Fejtsük ki D_n-et az első sora szerint:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} -\mu & b & & & \\ c & -\mu & b & & \\ & c & -\mu & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & -\mu \end{vmatrix} \\ &= -\mu \begin{vmatrix} -\mu & b & & & \\ c & -\mu & b & & \\ & c & -\mu & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & -\mu \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & b & & & \\ & -\mu & b & & \\ & c & -\mu & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & -\mu \end{vmatrix} \\ &= -\mu D_{n-1} - bcD_{n-2}. \end{aligned}$$

E differenciaegyenlet megoldásához kezdeti értékeket is keresünk. Természetesen adódik a $D_1 = -\mu$ és a $D_2 = \mu^2 - bc$ érték, de könnyebben boldogulunk, ha a $D_0 = 1$ értéket is bevesszük a sorozatba, ez ui. kielégíti a differenciaegyenletet, nevezetesen $\mu^2 - bc = D_2 = -\mu D_1 - bcD_0 = \mu^2 - bc$. Keressük tehát a $D_n = -\mu D_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_0 = 1$, $D_1 = -\mu$ explicit megoldását. A karakterisztikus egyenlet $x^2 + \mu x + bc = 0$, ahonnan

$$x_{12} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4bc}}{2},$$

így az általános megoldás

$$c_1\left(\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4bc}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4bc}}{2}\right)^n.$$

Innen az $n=0$ és $n=1$ esetekből adódó egyenletrendszer megoldása a c_1 és c_2 ismeretlenekre, valamint a velük felírt megoldás:

$$n=0:\ c_1+c_2=1$$

$$n=1:\ c_1\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4bc}}{2}+c_2\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4bc}}{2}=-\mu,$$

$$c_1=\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4bc}}{2\sqrt{\mu^2-4bc}},\quad c_2=-\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4bc}}{2\sqrt{\mu^2-4bc}},$$

$$D_n=\frac{\left(\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4bc}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4bc}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{\mu^2-4bc}}.$$

D_n nevezője nem lehet 0, mert az ellentmond a két kiinduló egyenletnek. A D_n értéke 0, ha

$$\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4bc}}{-\mu+\sqrt{\mu^2-4bc}}=\varepsilon^k,\ k=1,2,\ldots,n,$$

ahol ε egy primitív $n+1$-edik egységgyök, az egyszerűség kedvéért mondjuk $\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n+1}}$. k értéke nem lehet 0 vagy $n+1$, mert $\varepsilon^0=\varepsilon^{n+1}=1$, a tört számlálója és nevezője pedig különböző. A fenti formulából kifejezhető μ:

$$\frac{\varepsilon^k-1}{\varepsilon^k+1}=\sqrt{1-\frac{4bc}{\mu^2}}\quad\rightsquigarrow$$

$$\mu=\pm\frac{\varepsilon^{\frac{k}{2}}+\varepsilon^{-\frac{k}{2}}}{2}2\sqrt{bc}=\pm\frac{\mathrm{e}^{\frac{k\pi\mathrm{i}}{n+1}}+\varepsilon^{-\frac{k\pi\mathrm{i}}{n+1}}}{2}2\sqrt{bc}$$
$$=2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1},\ \text{ahol } k=1,2,\ldots,n.$$

Mivel $-\cos\frac{k\pi}{n+1}=\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$, ezért a $\pm$ előjel bármelyike kiválasztható. Így a $\lambda_k-a=\mu_k$ összefüggés alapján a $\mathbf{T}$ mátrix n különböző sajátértéke

$$\lambda_k=a+2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1},\ \text{ahol } k=1,2,\ldots,n.$$

Ha $a=2$, $b=c=-1$, akkor az $1-\cos(2\alpha)=2\sin^2\alpha$ alkalmazásával $2+2\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}=2-2\cos\frac{k\pi}{n+1}=4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}$, ahol $k=1,2,\ldots,n$.

9.34. Valóban, az I_n integrál eleget tesz a következő feltételeknek: $I_0=0$, $I_1=\pi$, és $I_{n+1}-(2\cos a)I_n+I_{n-1}=0$, ui.

$$I_{n+1}-(2\cos a)I_n+I_{n-1}$$
$$=\int_0^\pi \frac{\cos nx\cos x-\sin nx\sin x-\cos na\cos a+\sin na\sin a}{\cos x-\cos a}$$
$$-2\cos a\frac{\cos nx-\cos na}{\cos x-\cos a}$$
$$+\frac{\cos nx\cos x+\sin nx\sin x-\cos na\cos a-\sin na\sin a}{\cos x-\cos a}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^\pi 2\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\quad\text{mert } n>0.$$

Tehát $\lambda^2-(2\cos a)\lambda+1=0$ a karakterisztikus egyenlet, így a sajátértékek

$$\lambda_{12}=\frac{2\cos a\pm\sqrt{4\cos^2 a-4}}{2}=\mathrm{e}^{\pm a\mathrm{i}},$$

ahonnan a két alapmegoldás $(1,\mathrm{e}^{a\mathrm{i}},\mathrm{e}^{2a\mathrm{i}},\mathrm{e}^{3a\mathrm{i}},\ldots)$ és $(1,\mathrm{e}^{-a\mathrm{i}},\mathrm{e}^{-2a\mathrm{i}},\mathrm{e}^{-3a\mathrm{i}},\ldots)$. A kezdeti feltételekből adódó egyenletrendszer:

$$c_1+c_2=0,$$
$$c_1\mathrm{e}^{a\mathrm{i}}+c_2\mathrm{e}^{-a\mathrm{i}}=\pi,$$

amiből $c_1(2\mathrm{i}\sin a)=\pi$, azaz $c_1=\frac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}=-c_2$, így

$$I_n=\frac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}(\cos na+\mathrm{i}\sin na)-\frac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}(\cos na-\mathrm{i}\sin na)$$
$$=\pi\frac{\sin na}{\sin a}.$$

9.35. Ha $\mathbf{x}_p$ megoldás, azaz

$$\mathbf{x}_p'=\mathbf{A}\mathbf{x}_p+\mathbf{z},\qquad(*)$$

és $\mathbf{x}_0$ megoldása a homogén résznek, azaz $\mathbf{x}_0'=\mathbf{A}\mathbf{x}_0$, akkor összeadva a két egyenletet kapjuk, hogy $(\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_0)'=\mathbf{A}(\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_0)+\mathbf{z}$, tehát $\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_0$ is megoldása az inhomogén differenciaegyenlet-rendszernek. Másrészt, ha $\mathbf{x}_1$ egy tetszőleges megoldása az inhomogén rendszernek, azaz

$$\mathbf{x}_1'=\mathbf{A}\mathbf{x}_1+\mathbf{z},\qquad(**)$$

akkor az $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_p$ megoldása a homogén rendszernek, ui. kivonva a (**) egyenletből a (*) egyenletet kapjuk, hogy $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_p)'=\mathbf{A}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_p)$, azaz $\mathbf{x}_0'=\mathbf{A}\mathbf{x}_0$.

9.36. A megoldások:

a) $y=c\mathrm{e}^{-4t}$, $y=2\mathrm{e}^{-4t}$,
b) $y=c\mathrm{e}^{4t}$, $y=0$,
c) $y=c_1\mathrm{e}^{-4t}+c_2$, $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}+\frac{3}{2}$,
d) $y=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$, $y=2\cos 2t$,
e) $y=c_1\mathrm{e}^{-5t}+c_2\mathrm{e}^{t}$, $y=\mathrm{e}^{-5t}-2\mathrm{e}^{t}$,
f) $y=c_1\mathrm{e}^{-3t}+c_2\mathrm{e}^{-t}$, $y=2\mathrm{e}^{-3t}-6\mathrm{e}^{-t}$,
g) $y=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2t\mathrm{e}^{-2t}$, $y=\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}$,
h) $y=c_1\mathrm{e}^{-2t}\cos t+c_2\mathrm{e}^{-2t}\sin t$, $y=3\mathrm{e}^{-2t}\cos t$,
i) $y=c_1\mathrm{e}^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\mathrm{e}^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$,
$y=2\mathrm{e}^{-t/2}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

9.37. Először megoldjuk a homogén részt. A homogén differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja $x^2+\omega^2=0$, a sajátértékek $\pm\omega i$, így az összes megoldás

$$y=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

Az inhomogén egyenlet jobb oldalán a homogén rész megoldása szerepel, így egy megoldását $y_p=At\cos\omega t+Bt\sin\omega t$ alakban keressük. A deriváltak

$$y_p'=A\cos\omega t+B\sin\omega t-A\omega t\sin\omega t+B\omega t\cos\omega t,$$
$$y_p''=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$$
$$-At\omega^2\cos\omega t-B\omega^2 t\sin\omega t.$$

Behelyettesítve az $y_p'' + \omega^2 y_p = F\cos\omega t$ egyenletbe, majd együtthatóösszehasonlítást végezve kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ll} \cos\omega t: & 2B\omega = F, \\ \sin\omega t: & -2A\omega = 0, \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{F}{2\omega}.$$

Innen az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{F}{2\omega} t\sin\omega t + c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t.$$

9.38. Jelölje D a deriválás operátorát, I az identikus operátort, melyek az $\mathbb{R}$ minden pontjában differenciálható függvények terén hatnak. Ha $p \in \mathbb{R}[t]$ egy n-edfokú polinom, akkor D^{n+1} annullálja, azaz $D^{n+1}p = 0$, hisz $D^k t^m = 0$, ha $k > m$. Ha egy állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának a 0 k-szoros gyöke, akkor alakja $D^k(d(D))(y) = 0$, ahol a d polinomnak a 0 már nem gyöke. Így a $D^k(d(D))(y) = p$ (p foka n), akkor $D^{n+1}D^k(d(D))(y) = D^{n+1}p = 0$, azaz $D^{n+1+k}(d(D))(y) = 0$. Ennek megoldásai

$$\begin{aligned} y &= y_1 + c_1 + c_2 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1} \\ &\quad + A_1 t^k + A_2 t^{k+1} + \ldots + A_{n+1}t^{k+n} \\ &= (A_1 + A_2 t + \ldots + A_{n+1}t^n)t^k \\ &\quad + c_1 + c_2 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1} + y_1, \end{aligned}$$

ahol c_i tetszőleges konstans, y_1 az eredeti egyenlet 0-tól különböző sajátértékeihez tartozó megoldása és A_1, A_2,..., A_{n+1} tetszőleges konstansok a $D^{n+1+k}(d(D))(y) = 0$ általános megoldásában, de meghatározhatók a p polinom együtthatóiból az $D^k(d(D))(y) = p$ egy partikuláris megoldásában, ami $P(t)t^k$, ahol $P(t) = A_1 + A_2 t + \ldots + A_{n+1}t^n$.

Hasonlóan járhatunk el a többi esetben is. Az e^{at} annullálható a $D - aI$ operátorral, hisz

$$(D - aI)(\mathrm{e}^{at}) = a\mathrm{e}^{at} - a\mathrm{e}^{at} = 0.$$

Így ha p egy n-edfokú polinom, akkor $p(t)\mathrm{e}^{at}$ annullálható a $(D - aI)^{n+1}$ operátorral. Ha tehát egy állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának az a szám k-szoros gyöke, és a jobb oldal polinomszor e^{at} alakú, akkor a differenciálegyenlet

$$(D - aI)^k(d(D))(y(t)) = p(t)\mathrm{e}^{at}$$

alakra hozható, ahol a d polinomnak az a nem gyöke. Ekkor $(D - aI)^{n+1}(D - aI)^k(d(D))(y) = 0$, azaz $(D - aI)^{k+n+1}(d(D))(y) = 0$. Ennek megoldásai

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \mathrm{e}^{at}(c_1 + c_2 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1} \\ &\quad + A_1 t^k + A_2 t^{k+1} + \ldots + A_{n+1}t^{k+n}) \\ &= (A_1 + A_2 t + \ldots + A_{n+1}t^n)t^k\mathrm{e}^{at} \\ &\quad + (c_1 + c_2 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1})\mathrm{e}^{at} + y_1, \end{aligned}$$

ahol a korábbi jelöléseket használva az A_i együtthatók meghatározhatók a p polinom együtthatóiból, ha az eredeti $(D - aI)^k(d(D))(y(t)) = p(t)\mathrm{e}^{at}$ egyenlet egy partikuláris megoldását keressük. Ez ui. előáll az annullált egyenlet bázismegoldásainak lineáris kombinációjaként, de abból elhagyható minden olyan tag, mely az eredeti homogén egyenlet általános megoldásában is szerepel.

A $\cos bt$ és a $\sin bt$ is annullálható a $D^2 + b^2 I$ operátorral, hisz pl.

$$\begin{aligned} (D^2 + b^2 I)(\cos bt) &= (\cos bt)'' + b^2\cos bt \\ &= -b^2\cos bt + b^2\cos bt = 0. \end{aligned}$$

Így ha egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának a bi komplex szám k-szoros gyöke (és akkor az $-b$i is k-szoros gyök), és a jobb oldal $p(t)\cos bt + q(t)\sin bt$ alakú, ahol a p és q fokainak maximuma n, akkor a differenciálegyenlet

$$(D^2 + b^2 I)^k(d(D))(y(t)) = p(t)\cos bt + q(t)\sin bt$$

alakra hozható, ahol a d polinomnak a bi nem gyöke. Ekkor $(D^2 + b^2 I)^{n+1}(D^2 + b^2 I)^k(d(D))(y) = 0$, azaz $(D^2 + b^2 I)^{k+n+1}(d(D))(y) = 0$. Ennek megoldásai

$$\begin{aligned} y = y_1 &+ (c_1 + c_2 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1})\cos bt \\ &+ (d_1 + d_2 t + \ldots + d_{k-1}t^{k-1})\sin bt \\ &+ (A_1 + A_2 t + \ldots + A_{n+1}t^n)t^k\cos bt \\ &+ (B_1 + B_2 t + \ldots + B_{n+1}t^n)t^k\sin bt, \end{aligned}$$

ahol az A_i, B_i együtthatók a korábbiakhoz hasonlóan az inhomogén egyenlet jobb oldalán lévő függvény paramétereiből meghatározhatóak.

Végül az eddigiek közös általánosításaként tekintsük az $\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \sin bt)$ függvényt. Ezt annullálja a $((D - aI)^2 + b^2 I)$ operátor, ui.

$$\begin{aligned} &((D - aI)^2 + b^2 I)(\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \sin bt)) \\ &= (D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I)(\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \sin bt)) \\ &= (\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \sin bt))'' - 2a(\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \sin bt))' \\ &\quad + (a^2 + b^2)(\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \sin bt)) = 0. \end{aligned}$$

Így ha egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának az $a + b$i komplex szám k-szoros gyöke (és akkor az $a - b$i is k-szoros gyök), és a jobb oldal $\mathrm{e}^{at}(p(t)\cos bt + q(t)\sin bt)$ alakú, ahol a p és q fokainak maximuma n, akkor a differenciálegyenlet

$$(D^2 + b^2 I)^k(d(D))(y(t)) = \mathrm{e}^{at}(p(t)\cos bt + q(t)\sin bt)$$

alakra hozható, ahol a d polinomnak az $a + b$i nem gyöke. Ekkor

$$((D - aI)^2 + b^2 I)^{n+1}(D^2 + b^2 I)^k(d(D))(y) = 0,$$

azaz $((D-aI)^2+b^2I)^{k+n+1}(d(D))(y)=0$. Ennek megoldásai

$$\begin{aligned} y = y_1 &+ (c_1+c_2t+\ldots+c_{k-1}t^{k-1})e^{at}\cos bt \\ &+ (d_1+d_2t+\ldots+d_{k-1}t^{k-1})e^{at}\sin bt \\ &+ (A_1+A_2t+\ldots+A_{n+1}t^n)t^ke^{at}\cos bt \\ &+ (B_1+B_2t+\ldots+B_{n+1}t^n)t^ke^{at}\sin bt, \end{aligned}$$

ahol az A_i, B_i együtthatók a korábbiakhoz hasonlóan az inhomogén egyenlet jobb oldalán lévő függvény paramétereiből meghatározhatóak.

9.39. A megoldások:

a) $ce^{-4t}+e^t$,

b) $ce^{4t}+5te^{4t}$,

c) $c_1e^{-4t}+c_2+t^3-2t$,

d) $c_1\cos 2t+c_2\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t$,

e) $c_1e^{-5t}+c_2e^t-\cos t-\frac{3}{2}\sin t$,

f) $c_1e^{-3t}+c_2e^{-t}+te^{-t}$,

g) $c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+t^2e^{-2t}$,

h) $c_1e^{-2t}\cos t+c_2e^{-2t}\sin t+te^{-2t}\sin t$,

i) $c_1e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}t^2e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{5}{3}te^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

9.40.

a) Az együtthatómátrix sajátpárjai $(-1,(-1,1))$, $(4,(2,3))$, így az összes megoldás

$$\mathbf{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+c_2e^{4t}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

a kezdetiérték-probléma megoldása $c_1=-2$, $c_2=1$, azaz

$$\mathbf{x}(t)=-2e^{-t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+e^{4t}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

b) Az általános megoldás

$$\begin{aligned} x(t)&=c_1e^t\cos(\sqrt{2}t)+c_2\sqrt{2}e^t\sin(\sqrt{2}t)\\ y(t)&=c_1(-\frac{1}{\sqrt{2}})e^t\sin(\sqrt{2}t)+c_2e^t\cos(\sqrt{2}t). \end{aligned}$$

A kezdetiérték-probléma megoldása $c_1=0$, $c_2=2$, azaz

$$\begin{aligned} x(t)&=2\sqrt{2}e^t\sin(\sqrt{2}t)\\ y(t)&=2e^t\cos(\sqrt{2}t). \end{aligned}$$

c) Az általános megoldás:

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+c_2e^{-2t}\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása $c_1=1$, $c_2=2$, azaz

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+2e^{-2t}\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}.$$

d) Az általános megoldás:

$$\mathbf{x}(t)=c_1e^t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2e^t\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix},$$

azaz $x_1(t)=c_1e^t+c_2te^t$, $x_2(t)=c_2e^t$. A kezdetiérték-probléma megoldása $c_1=1$, $c_2=2$, azaz $x_1(t)=e^t+2te^t$, $x_2(t)=2e^t$.

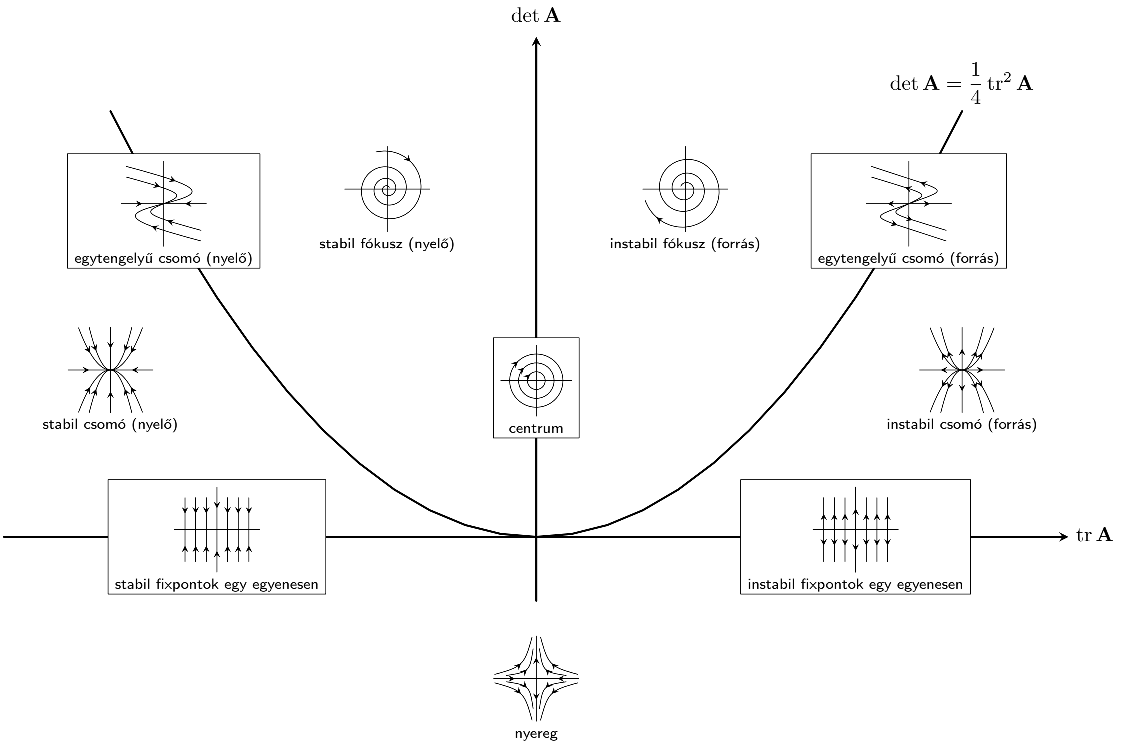
e) Az általános megoldás:

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}\cos t\\-\sin t\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása $c_1=2$, $c_2=-1$, azaz $x_1=2\cos t-\sin t$, $x_2=-2\sin t-\cos t$.

9.41. A feladat megoldásához ajánljuk valamely fázisportré rajzoló programot vagy komputeralgebra programot kísérletezésre. Pl. az MIT Mathlet oldalán található programmal a karakterisztikus polinom $\begin{bmatrix}0&1\\-\det(\mathbf{A})&\operatorname{tr}(\mathbf{A})\end{bmatrix}$ kísérőmátrixával vagy tetszőleges 2×2-es mátrixszal próbálkozhatunk. A karakterisztikus polinom diszkriminánsa $\Delta=\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})-4\det(\mathbf{A})$, így a $\Delta \lesseqgtr 0$ esetek a $\det(\mathbf{A})=\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})$ parabola által határolt területekkel jellemezhetők a nyom–determináns koordinátarendszerben. A felette lévő portrékon a stacionárius pont *fókuszpont* (ahová/ahonnan spirálvonalak vezetnek, a sajátértékek komplexek), alatta – de a vízszintes tengely fölött – *csomópontokkal* rendelkezőket, melyek két tengely metszéspontjában vannak (mik e tengelyek?), és körözés nélkül esnek e csomópontba, vagy távoznak onnan. Ha a determináns negatív, a stacionárius pont *nyeregpont* (egyik tengely mentén be, másikon kifelé halad a trajektória). Pozitív determináns esetén ha a nyom pozitív, a stacionárius pont instabil (kis elmozdulás után a trajektória távozik), míg negatív nyom esetén a stacionárius pont stabil, azaz kis elmozdulás esetén is visszatér e pontba. A degenerált eseteket ($\det\mathbf{A}=0$, $\operatorname{tr}\mathbf{A}=0$ vagy $\det(\mathbf{A})=\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})$) a következő ábrán bekeretezve jelöljük. A parabola vonalán ($\Delta=0$, azaz a két sajátérték megegyezik), egytengelyű csomópontot tartalmaz az portré, de ha $\mathbf{A}=\lambda_{1,2}\mathbf{I}$, minden egyenes tengely, ami átmegy a stacionárius ponton. Ezt nem ábrázoltuk, és azt az esetet sem, amikor $\det\mathbf{A}=\operatorname{tr}\mathbf{A}=0$, ekkor minden pont stacionárius. Az alábbi táblázat sorainak végén jelezzük a feladat kérdéseire a választ.

sajátértékek	$\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A})$ értéke	stacionárius pont	
$\lambda_1\lambda_2<0$	$\det(\mathbf{A})<0$	nyeregpont	*a)*
$\operatorname{Re}\lambda_1,\operatorname{Re}\lambda_2<0$	$\operatorname{tr}(\mathbf{A})<0$, $\det(\mathbf{A})>0$	stabil	*b), j)*
$\operatorname{Re}\lambda_1,\operatorname{Re}\lambda_2>0$	$\operatorname{tr}(\mathbf{A})>0$, $\det(\mathbf{A})>0$	instabil	*c), i)*
$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2>0$	$0<\det(\mathbf{A})\leqslant\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})$	csomó	
$\lambda_1,\lambda_2\notin\mathbb{R}$, $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$	$\det(\mathbf{A})>\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})$	fókusz	
$\lambda_{1,2}=\pm ci$	$\operatorname{tr}(\mathbf{A})=0$, $\det(\mathbf{A})>0$	centrum	*h)*
$0\neq\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$	$\det(\mathbf{A})=\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})$	egytengelyű csomó	*d), e)*
$0=\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$	$\det(\mathbf{A})=\frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A})$	fixpontok egy egyenesen	*f), g)*



det **A**
$\det \mathbf{A} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}^2\,\mathbf{A}$
egytengelyű csomó (nyelő)
stabil fókusz (nyelő)
instabil fókusz (forrás)
egytengelyű csomó (forrás)
stabil csomó (nyelő)
centrum
instabil csomó (forrás)
stabil fixpontok egy egyenesen
instabil fixpontok egy egyenesen
tr **A**
nyereg